ISSN 2181-3187

СУПЕРПОЗИЦИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО И ОДНОГО КВАДРАТИЧНОГО СТОХАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Мамуров Бобохон
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
bmamurov.51@mail.ru , b.j.mamurov @buxdu.uz
Шукурулаева Мохинур
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
Рузиев Адхам
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Аннотация. Изучена суперпозиция одного линейного и одного квадратичного стохастичного оператора. Найдена неподвижные точки последнего оператора.

Ключевые слова: линейные операторы, симплекс, квадратичные стохастические операторы, суперпозиция, неподвижные точки.

SUPERPOSITION OF ONE LINEAR AND ONE QUADRATIC STOCHASTIC OPERATOR

Mamurov Boboxon,
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,
bmamurov.51@mail.ru , b.j.mamurov @buxdu.uz
Shukurulaeva Mokhinur
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,
Ruziyev Adxam
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,

Annotation. The superposition of one linear and one quadratic stochastic operator is studied. The fixed points of the last operator have been found.

Key words: linear operators, simplex, quadratic stochastic operators, superposition, fixed points.

Непустое множество L элементов $x,\ y, z, \dots$ называется линейным, или векторным, пространством, если оно удовлетворяет таким условиям:

I. Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$, причем

1. $x + y = y + x$ (коммутативность);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность);

ISSN 2181-3187

3. В L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (существование нуля);

4. Для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

II. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (*произведение* элемента x на число α), причем

1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
2. $1 \cdot x = x$;
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Пусть E и E_1 – два линейные пространства.

Определение 1. Линейным оператором, действующим из E в E_1, называется отображение

$$y = Ax, \ \ x \in E, \ \ y \in E_1,$$

удовлетворяющее условию

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Совокупность D_A всех тех $x \in E,$ для которых отображение A определено, называется областью определения оператора A; вообще говоря, не предполагается, что $D_A = E$, однако мы всегда будем считать, что D_A есть линейное многообразие, т.е. если $x, y \in D_A$, то $\alpha x + \beta y \in D_A$ при всех α, β.

Оператор A называется непрерывным в точке $x_0 \in D_A$,если для любой окрестности V точки $y_0 = Ax_0$ существует такая окрестность U точки x_0, что $Ax \in V$, как только $x \in U \cap D_A$.

Пусть A и B – линейные операторы, причем A действует из пространства E в E_1, а B действует из E_1 в E_2. Произведением (суперпозициям) BA операторов A и B называется оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in E$ элемент $z = B(Ax)$ из E_2. Область определения D_C оператора $C = BA$ состоит из тех $x \in D_A$ для которых $Ax \in D_B$.

Изучение развития состояния системы является основной задачей теории динамических систем.

Эволюцию популяции можно изучать с помощью динамической системы квадратичного стохастического оператора (см. например [1- 28]) .

Пусть $E = \{1,2, . . . , n\}$. Множество

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in R^n : \ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

называется $(n-1)$ –мерным симплексом. Каждый элемент x∈ S^{n-1} является вероятностной мерой на E, и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической и т.п.) системы, состоящей из n элементов.

ISSN 2181-3187

Определение 2. Отображение $V: S^{n-1} \to S^{n-1}$

$$V: x_k' = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k}\ x_i x_j\ , \tag{1}$$

где

$$p_{ij,k} \geq 0\, , \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1, \tag{2}$$

называется квадратичным стохастическим оператором.

Определение 3. Квадратичный оператор (1), (2) назовем строго невольтерровским, если $p_{ij,k}$=0 при $k \in \{i,j\}, i,j,k = 1,2,\ldots,n$.

Определение 4. Точка $x \in S^{n-1}$ называется неподвижной точкой квадратичного стохастического оператора V, если $V(x) = x$.

Линейные оператора в R^3 имеет вид

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

В работе (1) рассмотрен квадратичный стохастический оператор

$$V: S^2 \to S^2,$$

$$V: x_1 = x_1^2 + 2x_2x_3\ ;\ x_2 = x_2^2 + 2x_1x_3\ ; x_3 = x_3^2 + 2x_1x_2.$$

Доказано, что оператор V имеет четыре неподвижные точки $M_1(1,0,0)$, $M_2(0,1,0)$, $M_3(0,0,1)$, $C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1-\alpha-\beta \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

В данной работе мы рассмотрим суперпозиция операторов A и V.

Теорема. Оператор $B = A(V(x))$ имеет единственную неподвижную точку $C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Доказательство. Нашем случае $B = A(V(x))$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1-\alpha-\beta \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2x_3 \\ x_2^2 + 2x_1x_3 \\ x_3^2 + 2x_1x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(x_1^2 + 2x_2x_3) + \beta(x_2^2 + 2x_1x_3) + (1-\alpha-\beta)(x_3^2 + 2x_1x_2) \\ \dfrac{1}{3}(x_1^2 + 2x_2x_3) + \dfrac{1}{3}(x_2^2 + 2x_1x_3) + \dfrac{1}{3}(x_3^2 + 2x_1x_2) \\ \dfrac{1}{3}(x_1^2 + 2x_2x_3) + \dfrac{1}{3}(x_2^2 + 2x_1x_3) + \dfrac{1}{3}(x_3^2 + 2x_1x_2) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

ISSN 2181-3187

Найдем неподвижные точки оператора B ($B(x)=x$)

$$\begin{cases} \alpha(x_1^2+2x_2x_3)+\beta(x_2^2+2x_1x_3)+(1-\alpha-\beta)(x_3^2+2x_1x_2)=x_1, \\ \frac{1}{3}(x_1^2+2x_2x_3)+\frac{1}{3}(x_2^2+2x_1x_3)+\frac{1}{3}(x_3^2+2x_1x_2)=x_2, \\ \frac{1}{3}(x_1^2+2x_2x_3)+\frac{1}{3}(x_2^2+2x_1x_3)+\frac{1}{3}(x_3^2+2x_1x_2)=x_3. \end{cases} \qquad (5)$$

Из второго уравнение система (5), имеем

$\frac{1}{3}(x_1^2+2x_2x_3+x_2^2+2x_1x_3+x_3^2+2x_1x_2)=x_2$ и

$x_1^2+2x_2x_3+x_2^2+2x_1x_3+x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2+x_3)^2$,

Поэтому $\frac{1}{3}((x_1+x_2+x_3)^2)=x_2$.

Так как $x_1+x_2+x_3=1$, $x_2=\frac{1}{3}$.

Из третьей уравнение система (5), получим

$$\frac{1}{3}(x_1^2+2x_2x_3+x_2^2+2x_1x_3+x_3^2+2x_1x_2)=x_3$$

и

$$\frac{1}{3}((x_1+x_2+x_3)^2)=x_3\,,\quad x_3=\frac{1}{3},$$

так как $x_1+x_2+x_3=1$.

Из первого уравнение система (5)

$$\alpha\left(x_1^2+\frac{2}{9}\right)+\beta\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x_1\right)+(1-\alpha-\beta)\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x_1\right)=x_1,$$

$$\alpha x_1^2+\frac{2\alpha}{9}+\frac{\beta}{9}+\frac{2\beta}{3}x_1+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x_1-\frac{\alpha}{9}-\frac{2\alpha}{3}x_1-\frac{\beta}{9}-\frac{2\beta}{3}x_1=x_1,$$

$$\alpha x_1^2+\left(\frac{2\beta}{3}-\frac{2\alpha}{3}-\frac{2\beta}{3}-1\right)x_1+\frac{2\alpha}{9}+\frac{\beta}{9}+\frac{1}{9}-\frac{\alpha}{9}-\frac{\beta}{9}=0,$$

$$\alpha x_1^2-\left(\frac{2\alpha}{9}-\frac{1}{3}\right)x_1+\frac{\alpha}{9}+\frac{1}{9}=0,\qquad 2x_1^2-\left(\frac{2\alpha}{3}+\frac{1}{3}\right)x_1+\frac{1}{9}(\alpha+1)=0,$$

$$\alpha x_1^2-\frac{1}{3}(2\alpha+1)x_1+\frac{1}{9}(\alpha+1)=0.$$

Решение последнего уравнение

$$x_{1(1,2)}=\frac{\frac{1}{3}(2\alpha+1)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{3}(2\alpha+1)\right)^2-4\alpha\cdot\frac{1}{9}(\alpha+1)}}{2\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(2\alpha+1)\pm\sqrt{\frac{4}{9}\alpha^2+\frac{4\alpha}{9}+\frac{1}{9}-\frac{4}{9}\alpha^2-\frac{4\alpha}{9}}}{2\alpha}=\frac{\frac{1}{3}(2\alpha+1)\pm\frac{1}{3}}{2\alpha},$$

$$x_{1(1)}=\frac{\frac{1}{3}(2\alpha+1)-\frac{1}{3}}{2\alpha}=\frac{\frac{2\alpha}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{2\alpha}=\frac{1}{3},$$

ISSN 2181-3187

$$x_{1(2)} = \frac{\frac{1}{3}(2\alpha+1)+\frac{1}{3}}{2\alpha} = \frac{\frac{2\alpha}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2\alpha} = \frac{\frac{2\alpha}{3}+\frac{2}{3}}{2\alpha} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3\alpha}.$$

Так как $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, поэтому $x_1 = \frac{1}{3}$.

Теорема доказано.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ганиходжаев Р.Н. Об одном семействе квадратичных стохастических операторов действующих в S^2. Докл.АН УзССР.1989,№1. 3-5 стр.
2. Mamurov B.J., Rozikov U.A. On cubic stochastic operators and processes. Journal of Physics: Conferense Series. **697** (2016), 012017.
3. Mamurov B.J., Rozikov U.A., Xudayarov S.S. Quadratic stochastic processes of type (σ/μ). arXiv: 2004.01702 . Pp. 1-14. math.D.S
4. Mamurov B.J., Rozikov U.A. and Xudayarov S.S. Quadratic Stochastic Processes of Type (σ/μ). Markov Processes Relat.Fields 26, 915-933 (2020).
5. Мамуров Б.Ж. О кубических стохастических процессов. Тезисы докладов межн. конфер. CODS-2009. С.72.
6. Мамуров Б.Ж. О решения эволюционных уравнений для кубических стохастических процессов. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. 305-307 стр.
7. Мамуров Б.Ж.,Шарипова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в S^2. “Scientific Progress”. Int.sientoific-Pract.conf.Tashkent, 2021, March 15. Стр.121-122.
8. Mamurov B.J. A central limit theorem for quadratic chains with finite enotypes. Scientific reports of Bukhara State University. 1:5,2018. Pp. 18-21.
9. Мамуров Б.Ж., Сохибов Д.Б. О неподвижных точек одного квадратичного стохастического оператора. Наука, техника и образование. 2021. №2 (77). Часть 2.Стр.10-15.
10. Мамуров Б.Ж. Эволюционные уравнения для конечномерных однородных кубических стохастических процессов. Bulletin of Institute of Mathematics 2019. №6, pp.35-39.
11. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. Kombinatorika haqidagi dastlabki ko`nikmalarni shakllantirish. “Science and education” scientific jornal, 2:10 (2021), pp. 497-505.
12. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О.Kombinatorik munosabatlar va ularning geometrik isbotlari haqida. Pedagogik mahorat.2021,oktyabr. Maxsus son. 20-23-bet.
13. Мамуров Б.Ж., Абдуллаев Ж. Регрессионный анализ как средство изучения зависимости между переменными // European science. 2021.№ 2 (58). С. 7-9.
14. Мамуров Б.Ж, Жураева Н.О. **О** первом уроке по теории вероятностей. Вестник науки и образования, № 18 (96).Часть 2. Москва, 2020,-37-39 стр

ISSN 2181-3187

15. Mamurov B, Amrilloyeva K. Tasodifiy hodisa tushunchasi haqida. SCIENTIFIC PROGRESS. №2. 2021, 463-467 b.
16. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О роли элементов истории математики в преподавании математики. Abstracts of X International Scientific and Practical Conference Liverpool, United Kingdom 27-29 May, 2020. C. 701-702.
17. Мамуров Б.Ж. Неравномерной оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для симметрично зависимых случайных величин . Молодой учёный. 197:11 (2018). С. 3-5.
18. Мамуров Б.Ж., Бобокулова С. Теорема сходимости для последовательности симметрично зависимых случайных величин. Academy. 55:4 (2020). Pp. 13-16.
19. Мамуров Б.Ж. О кубических стохастических процессов. Тезисы докладов межн. конфер. CODS-2009. С.72.
20.Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О историзм в процессе обучения математике. Вестник науки и образования.2020.№17(95).Часть 2. 70-74 стр.
21. Мамуров Б.Ж. О решения эволюционных уравнений для кубических стохастических процессов. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. 305-307 стр.
22. Мамуров Б.Ж.,Шарипова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в S^2. “Scientific Progress”. Int. sientoific-Pract. conf. Tashkent, 2021, March 15. Стр.121-122.
23. Мамуров Б.Ж., Шарипова М. Об одном квадратичном стохастическом операторе в S^2. Тезисы рес.науч.конф. “Сарымсаковские чтения”, Тошкент-2021, стр.100-101.
24. Mamurov B.Zh. The convex combinations of quadratic operators on S^2. Abstracts of theVII inter.conf.Modern prob.of applied mat.inf.tex.Al-Khwar., 21, pp. 87.
25. Mamurov B.J., Bazorova D. Biologiya va tibbiyotdagi ba’zi matematik modellar haqida. Science and edication. 8:2 (2022), 418-426 b.
26. Mamurov B.J., Bazorova D. Kvadratik stoxostik operatorlarga olib kelinadigan ba`zi modellar haqida. Science and edication. 4:3 (2023), 41-48 b.
27. Jamilov U.U., Mamurov B.J. Asymptotical behavior of trajectories of non-Volterra quadratic stochastic operators. Lobachevskii Journal of Mathematics(JM). 2022,Vol 43, №11,pp 3174-3182.
28. Mamurov B.J. A conver combination of two quadratic stoxastic operators acting in the 2D simplex. Изв. вузов Математика. 2023(7), pp 66-70.