УРАВНЕНИЕ РИККАТИ И СПОСОБ ЕГО РЕШЕНИЯ

Музаффарова Мохинур Умаровна,
студентка Бухарского
государственного университета

Аннотация. В данной статье исследуется уравнение Риккати. Приведены свойства, частные случаи уравнение и первые интегралы. Изложены способы нахождения общее решение уравнения Риккати. Также рекомендуется карточки (задачи по решению уравнение Риккати) с задачами для использования на открытые уроки.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, специальное уравнение, частное решение, разделение переменных, интегрирование.

ВВЕДЕНИЕ

Термин «дифференциальные уравнения» был предложен Г. Лейбницем в 1676 г., а первые исследования дифференциальных уравнений были проведены в конце XVII в. в связи с изучением проблем механики и некоторых геометрических задач.

Так, применение дифференциальных уравнений позволяет решать различные задачи, такие как моделирование популяций, распространение эпидемий, колебания в физических системах и даже прогнозирование погоды. Важность дифференциальных уравнений связана с их способностью описывать реальные системы и предсказывать их поведение.

С учетом этого, рассмотрим уравнение Риккати, который имеет многочисленные применения.

Уравнение Риккати – это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \qquad (1)$$

где $a(t), b(t)$ и $c(t)$ − известные функции.

Частный случай такого уравнения имеет вид:

$$b\frac{dx}{dt} = ax^2 + \alpha t^{\alpha}, \qquad (2)$$

где α, a, b - не равные нулю постоянные. Уравнение такого вида впервые был исследован итальянскими математиками Франческо Риккати и братьями Бернулли (Даниил, Иоганн, Николай-старший и Николай-младший) [1].

Ими было найдено условие, при котором это уравнение допускает разделение переменных и, следовательно, интегрирование в квадратурах: $\alpha = \frac{4n}{1-2n}, n \in \mathbb{N}$ или $\alpha = -2$.

Жозеф Лиувилль (1841 г.) доказал, что при других значениях уравнение (2) нельзя выразить в квадратурах от элементарных функций. Общее решение его может быть записано с помощью цилиндрических функций [2].

Уравнение вида (1) часто называют общим уравнением Риккати, а уравнение вида (2) — специальным уравнением Риккати.

Уравнения Риккати обладает следующие свойства:

- уравнение Риккати в случае $a(t) = 0$ является линейным и интегрируется в квадратурах;

- уравнение Риккати в случае $c(t) = 0$ является уравнением Бернулли и интегрируется в квадратурах с помощью замены переменной $y = \frac{1}{x}$;

- общее решение уравнения Риккати является дробно-линейной функцией от постоянной интегрирования, и обратно, любое дифференциальное уравнение первого порядка, обладающее этим свойством, является уравнением Риккати [3];

- при произвольном преобразование независимого переменного $x = \varphi(x_1)$ уравнение не меняет вид свой общий вид.

Общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной:

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}$$

и наоборот, если общее решение уравнения есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной, то соответствующее уравнение есть уравнение Риккати.

Если рассмотрим уравнение Риккати с постоянными коэффициентами

$$y' = ay^2 + by + c$$

то уравнение допускает разделение переменных, и мы сразу получаем общий интеграл

$$C_1 - x = \int \frac{dy}{ay^2 + by + c}$$

Еще раз отметим, Лиувиллем доказано, что уравнение (1) в общем случае не интегрируется в квадратурах. Но имеются случаи, когда уравнение интегрируется в квадратурах:

- если известно какое-нибудь частное решение $y_1(x)$ уравнения (1), то его общее решение может быть получено при помощи квадратур;

- если известны два частных решения уравнения (1), то его общий интеграл находится одной квадратурой;

ISSN 2181-3187

- если $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ — частные решения уравнения Риккати, соответствующие значениям c_1, c_2, c_3, c_4 постоянной интегрирования, то имеет место тождество

$$\frac{x_3(t)-x_1(t)}{x_3(t)-x_2(t)}:\frac{x_4(t)-x_1(t)}{x_4(t)-x_2(t)} \equiv \frac{c_3-c_1}{c_3-c_2}:\frac{c_4-c_1}{c_4-c_2}. \quad (3)$$

Левая часть тождества (3) - двойное отношение четырёх частных решений — является первым интегралом уравнения Риккати. Таким образом, общее решение уравнения восстанавливается из трёх независимых частных решений по формуле (3).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Следует отметить, что теоретические материалы по уравнению Риккати подробно изложены в ряд учебникам. Однако студенты испытывают трудности с классификацией уравнений, поиском конкретных частных решений и заменой переменных. С учетом этих фактов, в статье приведен алгоритм решения двух уравнений Риккати. Описаны свойства, не изложенные в учебниках. Думаем, что это поможет студентам решать подобные уравнения в будущем [4-7].

Так как нам известно, что уравнение Риккати, т. е. уравнение

$$y + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

в общем случае не решается в квадратурах.

Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли [7] и таким образом может быть решено в квадратурах.

Иногда частное решение удается подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y' + y^2 = x^2 - 2x$ в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять $y = ax + b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем a и b (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Другой пример: для уравнения $y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$ те же рассуждения приведет нас искать частное решение в виде $y = a/x$. Подставляя $y = a/x$ в уравнение. Найдем постоянную a [6,7].

Пример 1. Путем подбора найти частное решение уравнение $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$, привести данное уравнение Риккати к уравнению Бернулли и решить его.

Решение. Данное дифференциальное уравнение является уравнением Рикатти. Найдем частное решение. Ищем частное решение в виде $y = ax^m$, где $a = \text{const}$. Подставив его в уравнение, получим:

$$x^2amx^{m-1} + xax^m + x^2a^2x^{2m} = 4 \Rightarrow$$
$$amx^{m+1} + ax^{m+1} + a^2x^{2m+2} = 4.$$

Степени в правой и левой части должны совпадать, поэтому $m+1=0$. Следовательно: $m=-1$. Подставив $m=-1$, получим

$$-a+a+a^2=4$$

Следовательно, $a=2$. Таким образом, частное решение имеет вид

$$y=\frac{2}{x}.$$

Поскольку уже известно одно частное решение, проведем замену

$$y=\frac{2}{x}+z$$

и найдем производную:

$$y'=z'-\frac{2}{x^2}.$$

Подставим в исходное уравнение

$$x^2\left(z'-\frac{2}{x^2}\right)+x\left(\frac{2}{x}+z\right)+x^2\left(\frac{2}{x}+z\right)^2=4,$$

$$x^2z'-2+2+xz+4+4xz+x^2z^2=4,$$

$$x^2z'+5xz+x^2z^2=0,$$

$$z'+\frac{5z}{x}=-z^2.$$

Данное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли ($n=2$). Для решения уравнения Бернулли необходимо обе его части разделить на z^n и сделать замену $\frac{1}{z^{n-1}}=u$. Разделим уравнение на z^2:

$$\frac{z'}{z^2}+\frac{5}{xz}=-1.$$

Произведем замену $u=\frac{1}{z}$. Так как $u'=-\frac{1}{z^2}z'$, то

$$-u'+\frac{5u}{x}=-1 \Rightarrow u'-\frac{5u}{x}=1.$$

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Найдем решение однородного уравнения:

$$u'-\frac{5u}{x}=0.$$

Разделим переменные

$$\frac{du}{u}=\frac{5dx}{x}$$

и интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{du}{u}=5\int\frac{dx}{x} \Rightarrow ln|u|=5\,ln|x|+lnC \Rightarrow$$

$$u=Cx^5.$$

Таким образом, решение однородного уравнения: $u=Cx^5$.

ISSN 2181-3187

Считая постоянную C функцией от x, подставим решение однородного уравнения в исходное уравнение.Так как $u' = C'x^5 + 5Cx^4$, то:

$$C'x^5 + 5Cx^4 - \frac{5Cx^5}{x} = 1 \;\Rightarrow\; C'x^5 = 1 \;\Rightarrow$$

$$C' = \frac{1}{x^5} \;\Rightarrow\; C = \int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4} + C_1.$$

Подставим полученную функцию в решение однородного уравнения

$$u = \left(-\frac{1}{4x^4} + C_1\right)x^5 = C_1x^5 - \frac{x}{4}.$$

Проведем обратные замены. Так как $u = \frac{1}{z}$ и $y = \frac{2}{x} + z$:

$$\frac{1}{z} = C_1x^5 - \frac{x}{4} \;\Rightarrow\; z = \frac{4}{4C_1x^5 - x} \;\Rightarrow$$

$$y - \frac{2}{x} = \frac{4}{4C_1x^5 - x}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения:

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{4C_1x^5 - x}.$$

Пример 2. Путем подбора найти частное решение уравнение $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$, при этом привести данное уравнение Риккати к уравнению Бернулли и решить его.

Решение. Данное дифференциальное уравнение является уравнением Рикатти. Найдем частное решение. Ищем частное решение в виде $y = \frac{a}{x}$, где $a = const$. Подставив его в уравнение, получим:

$$-\frac{3a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

Отсюда получаем

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{3 \pm 1}{2} \;\Rightarrow$$

$$a_1 = 2, a_2 = 1.$$

Возьмем $a = 1$, соответственно получаем частное решение:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Поскольку уже известно одно частное решение, проведем замену:

$$y = \frac{1}{x} + z$$

и найдем производную

$$y' = z' - \frac{1}{x^2},$$

и подставим в исходное уравнение:

ISSN 2181-3187

$$3z' - \frac{3}{x^2} + \left(\frac{1}{x} + z\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3z' - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2z}{x} + z^2 + \frac{2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3z' + \frac{2z}{x} + z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{2z}{3x} = -\frac{1}{3}z^2.$$

Данное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли ($n = 2$). Для решения уравнения Бернулли необходимо обе его части разделить на z^n и сделать замену $\frac{1}{z^{n-1}} = u$. Разделим уравнение на z^2:

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{3xz} = -\frac{1}{3}$$

и произведем замену $u = \frac{1}{z}$. Так как $u' = -\frac{1}{z^2}z'$, то:

$$-u' + \frac{2u}{3x} = -\frac{1}{3}.$$

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Найдем решение однородного уравнения:

$$-u' + \frac{2u}{3x} = 0$$

и разделим переменные

$$\frac{du}{u} = \frac{2}{3}\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части уравнения и находим

$$\int \frac{du}{u} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad ln|u| = \frac{2}{3}ln|x| + lnC \quad \Rightarrow$$

$$u = Cx^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, решение однородного уравнения: $u = Cx^{\frac{2}{3}}$.

Считая постоянную C функцией от x, подставим решение однородного уравнения в исходное уравнение.Так как $u' = C'x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}Cx^{\frac{1}{3}}$, то:

$$-C'x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}Cx^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\frac{Cx^{\frac{2}{3}}}{x} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad C'x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad C' = x^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{C} = \frac{1}{3}\int x^{-\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}} + C_1.$$

Подставим полученную функцию в решение однородного уравнения

$$u = Cx^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{1}{3}} + C_1\right)\mathrm{x}^{\frac{2}{3}} = \mathrm{x} + \mathrm{C}_1\mathrm{x}^{\frac{2}{3}}$$

и проведем обратные замены. Так как $\mathrm{u} = \frac{1}{\mathrm{z}}$ и $\mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}} + \mathrm{z}$:

ISSN 2181-3187

$$\frac{1}{z} = x + C_1 x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow z = \frac{1}{x + C_1 x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{1}{x + C_1 x^{\frac{2}{3}}}.$$

Таким образом, решение исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + C_1 x^{\frac{2}{3}}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнением Риккати называют также многомерный аналог (1), то есть систему обыкновенных дифференциальных уравнений с независимыми переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$, правые части которых являются многочленами второй степени от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ с зависящими от t коэффициентами. Одномерные и многомерные уравнения Риккати находят применения в различных областях математики: алгебраической геометрии, теории вполне интегрируемых гамильтоновых систем, вариационном исчислении, теории конформных отображений, квантовой теории поля.

В римановой геометрии уравнению Риккати

$$S'(V) + S^2(V) + R(V, T)T = 0$$

удовлетворяют операторы формы для эквидистанционных поверхностей вдоль перпендикулярной к ним геодезической с касательным полем T. Как и уравнение Якоби, это уравнение применяется при исследовании геодезических.

Рекомендуется карточки (задачи по решению уравнение Риккати) с задачами для использования на открытые уроки.

Карточка 1

№ 1. Решите уравнение Риккати

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0.$$

№ 2. Путем подбора найти частное решение, привести данное уравнение Риккати к уравнению Бернулли и решить его:

$$xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2.$$

№ 3. Найти траектории, ортогональные к линиям семейства:

$$y^2 = Ce^x + x + 1.$$

Карточка 2

№ 1. Решите уравнение Риккати

$$y' + y^2 = x^2 - 2x.$$

№ 2. Путем подбора найти частное решение, привести данное уравнение Риккати к уравнению Бернулли и решить его:

ISSN 2181-3187

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$$

№ 3. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

Практический опыт показывает, что организация кружков по дополнительным темам по обыкновенным дифференциальным уравнениям положительно влияет на приобретение углубленное знание студентами. В этой связи рекомендуется дать больше информации о дифференциальных уравнениях, которая является одной из основных понятий предмет современной математики. Это поможет студентам успешно проводить научные исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, 2000 г., 177 с.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, Издания стереотип, 2022 г.. 512 с.

3. Зайцев В. Полянин А. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001 г., 576 с.

4. Музаффарова М.У. Частные производные и дифференцирование функций нескольких переменных // «Pedagogs» international research journal, 41:1 (2023), стр. 35-43.

5. Музаффарова М.У. Методы построение дифференциального уравнения по заданному семейству кривых // Journal of Theory, Mathematics and Physics. 2:11 (2003), стр.27-32.

6. Muzaffarova M. U. Bir jinsli oddiy differensial tenglamalarni yechish usullari haqida // World scientific research journal, Volume-23_Issue-1_January -2024,101-108 bet.

7. Muzaffarova Mohinur. (2023). Chiziqli oddiy differensial tenglamalarni yechish usullari haqida. Yosh Tadqiqotchi Jurnali, 2(5), 3–11.