

TRIGONOMETRIK ASOSLAR

Dadamirzayeva Iqbola Xakimjonovna

O'zbekiston Respublikasi Ichki ishlar vazirligi

Namangan akademik litseyi matematika fani o'qituvchisi

ANNOTATSIYA

Maqolada trigonometriya so'zining qaysi tildan olinganligi, uning tarixi, sinus, kosinus, tangens, kotangenslarning nisbatlari haqida ma'lumot berib o'tilgan.

Kalit so'zlar: trigonometriya, gradus, teorema, ekvivalent, sinus, kosinus, tangens, kotangens.

KIRISH

Trigonometriya (yunonchadan "trigon" - uchburchak, "metrezis" - o'lchash so'zlaridan olingan bo'lib, o'zbek tiliga "uchburchaklarni o'chash" deya tarjima qilinadi) - matematikaning asosiy bo'limlaridan biri hisoblanib, uchburchak tomonlari va burchaklari orasidagi bog'lanishlar, trigonometrik funksiyalarning xossalari va ular o'rtasidagi bog'lanishlarni o'rganadi. Hindistonliklar ilk marta trigonometrik funksiyalar qiymatlari jadvalini kashf qilganlar. Shumer astronomlari aylanalarni 360 gradusga bo'lish orqali burchak o'lchovini o'rganishdi. Ular va keyinchalik bobilliklar o'xshash uchburchaklar tomonlari nisbatlarini o'rgandilar va bu nisbatlarning ba'zi xususiyatlarini kashf etdilar, lekin buni uchburchaklarning tomonlari va burchaklarini topishning tizimli usuliga aylantirmadilar. Qadimgi nubiyaliklar ham xuddi shunday usuldan foydalanganlar.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA TADQIQOT METODIKASI

Miloddan avvalgi III asrda Yevklid va Arximed kabi yunon matematiklari akkordlar va aylanalarga chizilgan burchaklarning xossalarini o'rganib, zamonaviy trigonometrik formulalarga ekvivalent bo'lgan teoremlarni isbotladilar, garchi ular ushbu formulalarni algebraik jihatdan emas, balki geometrik jihatdan isbot qilgan bo'lsalar ham.

Miloddan avvalgi 140-yilda Gipparx (Nikea, Kichik Osiyo) zamonaviy sinus qiymatlari jadvalariga o'xshash akkordlarning birinchi jadvalarini bergan va ulardan trigonometriya va sferik trigonometriya masalalarini yechishda foydalangan. Milodiy II asrda yunon-misr astronomi Ptolomey (Misrning Iskandariya shahridan) o'zining "Almagest" asarining 1-kitobi, 11-bobida batafsil trigonometrik jadvallarni (Ptolemeyning akkordlar jadvali) tuzgan. Ptolemey o'zining trigonometrik funksiyalarini aniqlash uchun akkord uzunligidan foydalangan, bu biz ishlatadigan sinus funksiyasidan ozgina farq qiladi. Biz $\sin(\alpha)$ deb ataydigan qiymatning akkord uzunligini Ptolemey jadvalidagi kerakli burchak qiymati ikki barobarini (2α) aniqlash

va keyin bu qiymatni ikkiga bo'lish orqali topish mumkin. Batafsilroq jadvallar yaratilgunga qadar asrlar o'tdi va Ptolemeyning risolasi keyingi 1200 yil davomida O'rta asr Vizantiyasi, Islom va keyinchalik G'arbiy Yevropa dunyolarida astronomiyada trigonometrik hisoblarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.

Zamonaviy sinus funksiyasi birinchi marta Surya Siddxantada uchragan va uning xususiyatlarini V asrda (milodiy) hind matematiki va astronomi Aryabhata hujjatlashtirgan. Bu yunon va hind asarlari o'rta asr islom matematiklari tomonidan tarjima qilingan va kengaytirilgan. X asrga kelib islom matematiklari barcha oltita trigonometrik funksiyadan foydalanib, ularning qiymatlarini jadvalga kiritib, sferik geometriya masalalariga qo'llaganlar.

Fors olimi Nosiriddin at-Tusiy trigonometriyaning o'ziga xos matematik fan sifatida yaratuvchisi sifatida ta'riflangan. U birinchi bo'lib trigonometriyani astronomiyadan mustaqil matematik fan sifatida ko'rib chiqdi va sferik trigonometriyani hozirgi shaklga keltirdi. U sferik trigonometriyada to'g'ri burchakli uchburchakning oltita aniq holatlarini sanab o'tdi va o'zining "Sektor rasmi to'g'risida" asarida tekislik va sferik uchburchaklar uchun sinuslar qonunini bayon qildi, sferik uchburchaklar uchun tangenslar qonunini ochdi va ikkalasiga ham isbotlar keltirdi. Trigonometrik funksiyalar va usullar haqidagi bilimlar G'arbiy Yevropaga Ptolemeyning yunoncha "Almagest" asarining lotincha tarjimalari, shuningdek, Al Battani va Nosiriddin at-Tusiy kabi fors va arab astronomlarining asarlari orqali yetib bordi. Shimoliy yevropaliklarning matematikada trigonometriyaga oid eng qadimgi asarlaridan biri bu XV asr nemis matematigi Regiomontanusning "De Triangulis" asari bo'lgan. Shu bilan birga, Almagestning yunon tilidan lotin tiliga yana bir tarjimasi Jorj Trebizond tomonidan yakunlandi. XVI asrda Shimoliy Yevropada trigonometriya hali ham kam miqdorda ma'lum edi.

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Navigatsiya talablari va yirik geografik hududlarning aniq xaritalariga ortib borayotgan ehtiyoj tufayli trigonometriya matematikaning asosiy sohasiga aylandi. Trigonometriya so'zi ilk bor Bartholomeush Pitiushning 1595-yilda chop etilgan "Trigonometriya" asarida uchragan. Kompleks sonlarni trigonometriyaga to'liq kiritgan shved olimi Leonard Eyler edi.

Shotland matematiklari Jeyms Gregori(XVII asr) va Kolin Maklaurin(XVIII asr)ning ishlari trigonometrik qatorlarning rivojlanishiga ta'sir ko'rsatdi. Yana, XVIII asrda Bruk Teylorning Teylor seriyalari yaralgan.

Katetlari $BC = a$, $AC = b$ va gipotenuzasi $AB = c$ bo'lgan to'g'ri burchakli ABC uchburchak berilgan bo'lsin ($\angle C = 90^\circ$) O'tkir burchak sinusi (\sin) - o'tkir burchak qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbatiga teng: $\sin A = a/c$; $\sin B = b/c$ O'tkir burchak kosinusi (\cos) - o'tkir burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbatiga teng: $\cos A = b/c$; $\cos B = a/c$ O'tkir burchak tangensi (\tan) - o'tkir burchak qarshisidagi

katetning unga yopishgan katetga nisbatiga teng: $\tan A = a/b = \sin A / \sin B$; $\tan B = b/a = \sin B / \sin A$. O'tkir burchak kotangensi (cot) - o'tkir burchakka yopishgan katetning uning qarshisidagi katetga nisbatiga teng: $\cot A = b/a = \cos A / \cos B$; $\cot B = a/b = \cos B / \cos A$.

Trigonometrik ayniyatlarni isbotlashning 4 ta asosiy usuli mavjud:

1-usul. Ayniyatning chap qismida ayniy shakl almashtirishlar bajarib, uning o'ng qismiga tengligini ko'rsatish.

2-usul. Ayniyatning o'ng qismida ayniy shakl almashtirishlar bajarib, uning chap qismiga tengligini ko'rsatish. 3-usul. Ayniyatning chap va o'ng qismlarining ayirmasini nolga tengligini ko'rsatish. 4-usul. Ayniyatning chap va o'ng qismlarida bir xil shakldagi o'zgarishlarni amalga oshirish va ularni bir xil ifoda qilish.

Beruniyning "Qonuni Ma'sudiy" asarida sinuslar jadvali 15 minut oraliq bilan, tangenslar jadvali 1° oraliq bilan 10⁻⁸ gacha aniqlikda berilgan. Bunda sinuslar jadvali 1 minut oraliq bilan, tangenslar jadvali 0° dan 45° gacha 1 minut oraliq bilan, 46° dan 90° gacha esa 5 minut oraliq bilan 10⁻¹⁰ gacha aniqlikda berilgan. G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy „Vatar va sinus haqida ri sola“ sida $\sin 1^\circ$ ni verguldan so'ng 17 xona aniqligida hisoblaydi: $\sin 1^\circ = 0,017452406437283512\dots$

Geometriya kursida gradus bilan ifodalangan burchakning sinusi, kosinusu va tangensi kiritilgan. Ixtiyoriy burchakning sinusi va kosinusi quyidagicha ta'riflanadi: α burchakning sinusi deb (1;0) nuqtani koordinatalar boshi atrofida α burchakka burish natijasida hosil bo'lgan nuqtaning ordinatasiga aytiladi va $\sin \alpha$ tarzida belgilanadi. α burchakning kosinusi deb (0;1) nuqtani koordinatalar boshi atrofida α burchakka burish natijasida hosil bo'lgan nuqtaning absissasiga aytiladi $\cos \alpha$ tarzida belgilanadi. α burchakning tangensi deb α burchak sinusining uning kosinusiga nisbatiga aytiladi va $\operatorname{tg} \alpha$ kabi belgilanadi. Aytaylik, (1;0) nuqta birlik aylana bo'yicha soat mili harakatiga qarama-qarshi harakat qilmoqda.

Bu holda birinchi chorakda joylashgan nuqtalarning ordinatalari va absissalari musbat bo'ladi. Ikkinchi chorakda joylashgan nuqtalar uchun ordinatalar musbat, absissalar esa manfiy bo'ladi. Shunga o'xshash, uchinchi chorakda $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$, to'rtinchi chorakda esa $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$. Nuqtaning aylana bo'yicha bundan keyingi harakatida sinus va kosinuslarning ishoralari nuqta qaysi chorakda turganligi bilan aniqlanadi. Sinus bilan kosinus orasidagi munosabatni aniqlash. Masalan, birlik aylananing M(x;y) nuqtasi (1;0) nuqtani α burchakka burish natijasida hosil qilingan bo'lsin. U tarzda sinus va kosinusning ta'rifiga ko'ra, $x = \cos \alpha, y = \sin \alpha$ bo'ladi. M nuqta birlik aylana tegishli, shuning uchun uning (x; y) koordinatlari $x^2 + y^2 = 1$ tenglamani qanoatlantiradi.

Demak, bunga asosan, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ tenglikda α ning istalgan qiymatida bajariladi va asosiy trigonometrik ayniyat deb ataladi. Tangens va kotangens orasidagi bog'lanishni aniqlaydigan bo'lsak, tengliklarni ko'paytirib, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ tenglikni hosil

qilamiz. Aytaylik, birlik aylananing M_1 va M_2 nuqtalari $P(1; 0)$ nuqtani, mos ravishda, α va $-\alpha$ burchaklarga burish natijasida hosil qilingan bo'lsin.

U holda Ox o'q M_1 OM_2 burchakni teng ikkiga bo'ladi va shuning uchun M_1 va M_2 nuqtalar Ox o'qqa nisbatan simmetrik joylashgan. Bu nuqtalarning absissalari bir xil bo'ladi, ordinatalari esa faqat ishoralari bilan farq qiladi. M_1 nuqta $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ koordinatalarga, M_2 nuqta $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$ koordinatalarga ega. Shuning uchun $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \cos(-\alpha)=\cos\alpha$. Tangensning ta'rifidan foydalanib, hosil qilamiz: $\operatorname{tg}(-\alpha)=\sin(-\alpha)/\cos(-\alpha)=-\sin\alpha/\cos\alpha=-\operatorname{tg}\alpha$.

Demak, $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. Shunga o'xshash, $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$. L.Eyler trigonometric formullalarni kiritish bilan, bir xil belgilashlarni joriy qildi. Trigonometrik funksiyalarning har bir chorakdagi ishoralarni aniqladi, keltirish formullalarini joriy qildi, funksiyalarning aniqlash sohalarni tatbiq qildi. Trigonometrik funksiyalarining argumentlari nafaqat burchak yoki yoy, balki ihtiyoriy kattalikdagi son ekanligini Eyler birinchi bo'lib analitik yo'l bilan sistemali bayon qildi.

Ungacha har bir trigonometrik teoremani mos ravishdagi geometric chizma yordamida isbotlashgan. Unga qadar trigonometrik funksiyalarni yoydan kata bolgan holr kam o'rganilgan. Faqatgina uning ilmiy asarlarida trigonometrik funksiyalarning ihtiyoriy argumentlari holatlari to'liq o'rganilgan.

XULOSA

Algebraning katta bo'limlaridan biri bo'lgan trigonometriya bo'limining boshlang'ich qismi bo'lgan burchaklar tushunchasi haqida qisqacha ko'rib o'tildi. Bu jarayonda ko'rilishi kerak bo'lgan tushunchalar avval keltirib chiqarilgan bo'lib, biz ular yuzasidan tushunchamizni bildirishga harakat qildik.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Rik Pimentell, Tell Uorri. Cambridge IGCSE core mathematics(4th edition).
2. Otto Neugebauer. Qadimgi matematik astronomiya tarixi. Springer-Verlag
3. Gipparxning akkordlar jadvali.