ISSN 2181-3187

GAUSSNING NORMAL TAQSIMOT QONUNI

Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 2 – bosqich talabasi
Erkinova Odinaxon Kozimjon qizi
Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 1 – bosqich talabasi
Alijonov Shohruhbek Akramjon o`g`li
Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 1 – bosqich talabasi
Ismoilova Mohlaroyim Muhammadishoq qizi
Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 1 – bosqich talabasi
Tursunova Zarnigorxon Nurbek qizi

ANNOTATSIYA:

Ushbu maqola - uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik fumksiyasi haqida kata malumot berilgan. Yani Gaussning normal qonuni bo'yicha taqsimoti ham deyiladi shuni ham ko`rib o`tamiz.

Kalit so`z: uzluksiz, taqsimoti, Gauss, integral.

ξ - uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\pi^2}} \quad (\sigma > 0) \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lsa, u Gaussning normal qonuni bo'yicha taqsimlangan deb ataladi.

$p_{\xi}(x)$ funksiyaning musbatligi va juftligi ravshan. $x \to \pm\infty$ da $p_{\xi}(x) \to 0$ ligini oddiygina ko'rsatish mumkin. x=a nuqtada funksiya yagona $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ga teng bo'lgan yagona maksimumga ega. Funksiyaning grafigi $x = \sigma + a$ va $x = -\sigma + a$ da burilish nuqtalariga ega ekanligini ikkinchi hosila yordamida aniqlash mumkin. Odatda a=0 va $\sigma = 1$ bo'lgan hol

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad (2)$$

ko'p qaraladi. Bu holda $\varphi(x)$ funksiya markazlashtirilgan va normallangan $\frac{(\xi - a)}{\sigma}$ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyaning qiymatlari jadvallari

ISSN 2181-3187

tuzilgan. Bu funksiya yordamida ξ - normal taqsimotli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$p_{\xi}(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \qquad (3)$$

Puasson integralini biz matematik analiz kursida ko'rgan edik, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

Bundan foydalanib quyidagini ko'rsatish oson.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}dx=1 \qquad (4)$$

Bizga yana quyidagi ikki integralning qiymatlari kerak bo'ladi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx=0 \qquad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx=1 \qquad (6)$$

Isboti:

(5) tenglik integral ostidagi funksiyaning toqligi va integrallash chegarasining 0 ga nisbatan simmetrikligidan osongina kelib chiqadi. (6) tenglikni hosil qilish uchun bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{\frac{-x^2}{2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{\frac{-x^2}{2}}d\left(-\frac{-x^2}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(xe^{\frac{-x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{\frac{-x^2}{2}}dx=1$$

Endi (1) zichlik funksiyaga ega bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ - ning matematik kutilmasi

$$M\xi=a \qquad (7)$$

va dispersiyasi

ISSN 2181-3187

$$D\xi = \sigma^2 \qquad (8)$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Matematik kutilmaning ta'rifidan

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t + a)\varphi(t)dt = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi(t)dt + a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt \overset{(2)}{=} a$$

(1): $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \dfrac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (4) va (5) tengliklardan.

(7) tenglik isbot bo'ldi. (8) ni isbot qilish uchun dispersiyani hisoblashning quyidagi formulasidan foydalanamiz:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 p_\xi(x)dx$$

$m = M\xi = a$ bo'lgani uchun,

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dt \overset{(1)}{=} \sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)dt \overset{(2)}{=} \sigma^2$$

(1): $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \dfrac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (6) formulaga asosan.

Endi normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi funksiyadan foydalanamiz:

$$F_0(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$$

Bundan esa zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ bo'lgan ξ - normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi munosabat orqali topiladi. $F_\xi(x) = F_0\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$.

$F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvali tuzilgan.

$F_0(x)$ funksiyaning quyidagi xossalarini isbotlaymiz:

$$F_0(-x) = -F_0(x) \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_0(x) = \frac{1}{2} \qquad (10)$$

Avval (9) tenglikni isbotlaymiz:

$$F_0(-x) = \int_0^{-x}\varphi(t)dt \overset{(1)}{=} -\int_0^{x}\varphi(-z)dz \overset{(2)}{=} -\int_0^{x}\varphi(z)dz = -F_0(x)$$

ISSN 2181-3187

(1): $z=-t$ almashtirish bajaramiz, bunda $-dz=dt$ bo'ladi.

(2) $\varphi(z)$ funksiyaning juftligidan.

Endi (10) tenglikni isbot qilamiz:

$$\lim_{x\to+\infty} F_0(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^\infty \varphi(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)dt = \frac{1}{2}$$

ξ - normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning (α,β) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli

$$P(\alpha<\xi<\beta) = F_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) = F_0(\beta) - F_0(\alpha)$$

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha biror musbat sondan kichikligi ehtimolligini hisoblash uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(|\xi-a|<\delta) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad \delta>0 \qquad (11)$$

Xususan a=0 bo'lganda $P(|\xi|<\delta) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ tenglik o'rinli.

Agar (11) tenglikda $\delta=\sigma\cdot t$ .deb olsak $P(|\xi-a|<\sigma\cdot t) = 2F_0(t)$ ni hosil qilamiz. Xususan t=3 bo'lganda

$$P(|\xi-a|<3\sigma) = 2F_0(3) = 0{,}9973$$

ga egamiz. Bu tasdiq "uch sigma" qoidasi deb ataladi.

Normal taqsimotdan o'zga taqsimotlarni o'rganishda ularning normal taqsimotdan farqini sonli baholash masalasi kelib chiqadi. Shu maqsadda maxsus sonli xarakteristikalar kiritiladi. Shulardan, xususan asimmetriyava ekstsess tushunchasini ko'rib chiqaylik. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun bu xarakteristikalar nolga teng. Shu sababli o'rganilayotgan taqsimot uchun bu xarakteristikalarning sonli qiymatlari etarlicha nolga yaqin bo'lsa, bu taqsimotning normal taqsimotga yaqinligi xaqida gapirish mumkin. Aksincha, asimmetriya va ekstsesslarning katta qiymatlari bu taqsimotning normal taqsimotdan katta farqlanganligini bildiradi.

Asimmetriyaning baholanishini ko'rib chiqaylik. Simmetrik taqsimot uchun (bunday taqsimotning grafigi $x=M(X)$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik) xar bir toq tartibli markaziy momenti nolga teng. Shuning uchun bu toq tartibli ixtiyoriy (birinchi tartibli momentidasn boshqa, chunki ixtiyoriy taqsimotning birinchi tartibli markaziy momenti nolga teng) momentlar asimmetriyani baholash uchun xizmat qiladi. Tabiiyki ularning eng soddasi η_3-uchinchi tartibli markaziy momenti tanlanadi.Lekin bu η_3-moment tasodifiy miqdor o'lchanayotgan o'lchov birligidan bog'liq bo'lganligi sababli uni $o^3 = \sqrt{D(X)}^3$ ga bo'lib, birlik o'lchovisiz xarakteristikaga o'tib olinadi.Shunday qilib nazariy taqsimotning asimmetriyasi deb

ISSN 2181-3187

markaziy uchinchi tartibli momentning o’rtacha kvadratik chetlanish kubiga nisbatiga aytiladi: $A_3 = \frac{\eta_3}{\sigma^3}$.

Agar taqsimot egri chizig’ining uzun qismi, matematik kutilmadan o’ng tomonda joylashgan bo’lsa, asimmetriya musbat (2 rasm,a) va agar taqsimot egri chizigining uzun qismi matematik kutilmadan chap tomonda joylashgan bo’lsa, asimmetriya manfiy bo’ladi. (2 rasm,b).

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Б.Я.Ягудаев. Ажойиб сонлар оламида. Ўқитувчи нашрёти, Тошкент-1973.
2. В.В. Бардушкин ва бошқалар. Основы теории делимости числ. МГТУ, Москва-2003
3. Ёш математик қомусий луғати. Қомуслар бош таҳририяти. Тошкент-1991.
4. А.Нурметов, И.Қодиров.“Математикадан синфдан ташқари машғулотлар”. Тошкент-1980.