ISSN 2181-3187

NORMAL TAQSIMOT PARAMETRLARINI BAHOLASH. TANLANMA O'RTA QIYMAT VA DISPERSIYA

Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 2 – bosqich talabasi
Erkinova Odinaxon Kozimjon qizi
Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 1 – bosqich talabasi
Alijonov Shohruhbek Akramjon o`g`li
Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 1 – bosqich talabasi
Ismoilova Mohlaroyim Muhammadishoq qizi
Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti
Matematika va informatika yònalishi 1 – bosqich talabasi
Sherqo`ziyeva Dildora Abrorjon qizi

ANNOTATSIYA:

Ushbu maqola o'rganilayotgan X tasodifiy mikdor $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimotga ega bo'lib,uning a va σ^2 noma'lum parametrlarini $X_1, X_2,..., X_n$ tanlanma bo'yicha haqiqatga maksimal o'xshashlik usulida baholash masalasini kuramiz.

Kalit so`z: Tanlanma o'rta qiymat, tanlanma dispersiya,tuzatilgan tanlanma dispersiya.

Bu erda normal taqsimotning

$$f(x,a,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

zishlik formulasidan foydalanamiz.Bu holda haqiqatga maksimal o'xshashlik funktsiyasini topamiz:

$$L(X_1, X_2,..., X_n, a, \sigma^2) = f(X_1, a, \sigma^2)\cdot f(X_2, a, \sigma^2)\cdots f(X_n, a, \sigma^2) =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2\right\} \quad .$$

Xisoblashlarni soddalashtirish maksadida bu funktsiyaning natural logarifmini karaymiz:

$$\ln L(X_1, X_2..., X_n, a, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$$

Bu funktsiyadan a va σ^2 parametrlar bo'yicha xosilalar olib, ushbu

ISSN 2181-3187

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2,\dots, X_n a, \sigma^2)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (X_1 - a) = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial \ln L(X_1, X_2,\dots, X_n a, \sigma^2)}{\partial a} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} (X_1 - a)^2 = 0$$

haqiqatga maksimal o'xshashlik tenglamalar sistemasini xosil kilamiz. Bu sistemani eshib, a va σ^2 parametrlar uchun $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ haqiqatga maksimal o'xshashlik baholarini topamiz:

$$a_n^* = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (1)$$

$$(\sigma^2)_n^* = \frac{1}{n}\left[(X_1 - a_n^*)^2 + (X_2 - a_n^*)^2 + \dots + (X_n - a_n^*)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a_n^*)^2 \qquad (2)$$

Agarda X tasodifiy mikdor $N(a, \sigma^2)$ normal taqsimotga ega bulsa, u holda

$$a = M(X)\ , \qquad \sigma^2 = D(X)$$

bo'ladi. Demak (1) va (2) formulalar bilan aniklanadigan $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ normal taqsimotning o'rta qiymati (matematik kutilishi) M(X) va dispersiyasi D(X)uchun statistik baholar bo'ladi. Ular normal taqsimotdan tashkari boshka juda ko'p taqsimotlarning o'rta qiymati va dispersisi uchun xam yaxshi statistik baho bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shu sababli (1) va (2) formulalar orqali topiladigan statistik baholar mos ravishda tanlanma o'rta qiymat va tanlanma dispersiya deb ataladi xamda $\overline{X}$ va S^2 kabi belgilanadi:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad (3)$$

Bu baholarning xossalarini urganamiz.

Buning uchun $X_i, i = 1,2,\dots,n,$ boglikmas, bir xil taksimlangan tasodifiy mikdorlar bo'lib,

$$M(X_i) = a \quad , \ D(X_i) = \sigma^2, \quad i = 1,2,\dots,n$$

ekanligidan foydalanamiz.

$$M(\overline{X}) = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = a \qquad (4)$$

Demak $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat noma'lum M(X)=a matematik kutilish uchun siljimagan baho bo'ladi.

$$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (5)$$

Bu erdan

ISSN 2181-3187

$$\lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat a= M(X) matematik kutilish uchun asosli baho bo'ladi.

Bundan tashkari normal taqsimot uchun bu baho effektiv,boshka taqsimotlarning ko'pi uchun esa asimptotik effektiv bo'lishini isbotlash mumkin.

S^2 tanlanma dispersiya xossalarini urganish uchun uni kuyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - a) - (\overline{X} - a)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 - \frac{2}{n}(\overline{X} - a)\sum_{i=1}^{n} (X_i - a) + \frac{1}{n}\cdot n(\overline{X} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 - \frac{2}{n}(\overline{X} - a)\cdot n(\overline{X} - a) + (\overline{X} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 - (\overline{X} - a)^2 \qquad (6)$$

Bu erda

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - a) = \sum_{i=1}^{n} X_i - na = n\overline{X} - na = n(\overline{X} - a)$$

ekanligidan foydalanildi.

Endi,dispersiya ta'rifiga asosan

$$M(X_i - a)^2 = M(X_i - M(X_i))^2 = D(X_i) = \sigma^2$$

va (4)-(5) tengliklarga asosan

$$M(\overline{X} - a)^2 = M(\overline{X} - M(\overline{X}))^2 = D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ekanligidan foydalanib, (6) tenglikdan ushbu natijani olamiz:

$$M(S^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i - a)^2 - M(\overline{X} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n} n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad (7)$$

Demak,

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

va S^2 tanlanma dispersiya noma'lum D(X)=σ^2 dispersiya uchun siljigan baho bo'ladi.

Ammo

ISSN 2181-3187

$$\lim_{n\to\infty} M(S^2) = \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \sigma^2 \quad ,$$

ya'ni S^2 asimptotik siljimagan baho bo'ladi. Shu sababli tanlanma hajmi netarli katta bulsa, S^2 bahoni siljimagan deb xisoblash mumkin. Agar tanlanma hajmi nkatta bulmasa, σ^2 dispersiya uchun siljimagan baho sifatida

$$(S^2)^* = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad (8)$$

bahoni karash mumkin. Bu baho tuzatilgan tanlanma dispersiya deb ataladi va uning uchun

$$M(S^2)^* = M(\frac{n}{n-1} S^2) = \frac{n}{n-1} M(S^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

munosabat o'rinli bo'ladi, ya'ni $(S^2)^*$siljimagan baho bo'ladi. S^2 va $(S^2)^*$tanlanma dispersiyalar $\sigma^2 = D(X)$ dispersiya uchun asosli baho bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Agarda X ustidagi kuzatuv natijalari statistik taqsimot qonuni orqali berilgan bulsa, tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ va tanlanma dispersiya S^2

$$\overline{X} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{m} X_\kappa n_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^{m} n_\kappa} \quad , \quad S^2 = \frac{\sum_{\kappa=1}^{m} (X_\kappa - \overline{X})^2 n_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^{m} n_\kappa} \qquad (9)$$

formulalar bilan topiladi. Bu erda X_k , k =1,2,…,m, karalayotgan X tasodifiy miqdorning uzaro teng bulmagan kuzatilgan qiymatlarini, n_k esa shu qiymatlar chastotasini ifodalaydi.

Masalan, X ustidagi n=10 ta kuzatuv natijalari

x_k	1	1	2	5
n_k	1	3	4	2

statistik taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Bu holda

$$\overline{X} = \frac{-1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 2}{1+3+4+2} = \frac{20}{10} = 2 \quad ,$$

$$S^2 = \frac{(-1-2)^2 \cdot 1 + (1-2)^2 \cdot 3 + (2-2)^2 \cdot 4 + (5-2)^2 \cdot 2}{1+3+4+2} = \frac{30}{10} = 3$$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Б.Я.Ягудаев. Ажойиб сонлар оламида. Ўқитувчи нашрёти, Тошкент-1973.
2. В.В. Бардушкин ва бошқалар. Основы теории делимости числ. МГТУ, Москва-2003
3. Ёш математик қомусий луғати. Қомуслар бош таҳририяти. Тошкент-1991.
4. А.Нурметов, И.Қодиров."Математикадан синфдан ташқари машғулотлар". Тошкент-1980.