ISSN 2181-3187

# ANIQ INTEGRALNING FIZIK VA IQTISODIY MASALALARDA QO‘LLANILISHI

*TMTI assistenti* - ***F.K.Payanova***
*TMTI assistenti* - ***Z.Jo‘rayeva***
*I kurs talabasi* - ***S.B.Xursanova***

**Annotatsiya:** Differensial va integral hisob yaratilgach bir qator geometrik, fizik, mexanik va iqtisodiy masalalarni yechish uchun imkoniyat paydo bo‘ldi. Ushbu maqolada matematikadan amaliy mashg‘ulotlarda aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar orqali mavzuning tadbiqlari haqida aytib o‘tilgan. Talabalarga aniq integral mavzusining ahamiyatliligi ko‘rsatilgan.

**Kalit so‘zlar:** Differensial hisob, integral, yuqori va quyi chegara**,** o‘zgaruvchi kuch bajargan ish, notekis harakatda bosib o‘tilgan masofa,

Lorents egri chizig‘i, talab funksiyasi, taklif funksiyasi, bozor muvozanati.

Aniq integral juda ko‘p amaliy masalalarni yechish uchun qo‘llaniladi. Geometriyada aniq integraldan turli ko‘rinishdagi egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalarini hisoblash, egri chiziq yoyining uzunligini topish, jismlar hajmini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalaniladi. Aniq integralning mexanik tatbiqlariga misol sifatida kuch bajargan ishni hisoblash, notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani aniqlash, sim massasini topish kabilarni ko‘rsatish mumkin. Iqtisodiy nazariyada esa aniq integral yordamida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini topish, iqtisodiy ko‘rsatkich bo‘lgan Djini koeffitsiyentini hisoblash, iste’molchi va ishlab chiqaruvchining yutug‘ini aniqlash kabi masalalar o‘z yechimini topadi. Aniq integral tadiqlari sifatida ayrim masalalarni ko‘rib chiqamiz

O‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash masalasi. Yo‘nalishi va kattaligi o‘zgarmas bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta $L$ to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsin. Bunda kuch yo‘nalishi bilan moddiy nuqtaning harakat yo‘nalishi bir xil deb olamiz. Agar bu shartlarda kattaligi $f$ bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta $L$ to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $a$ nuqtadan $b$ nuqtaga ko‘chirilsa, ya’ni $b–a$ masofaga siljigan bo‘lsa, unda bajarilgan ish $A=f\cdot(b–a)$ formula bilan aniqlanishi bizga maktab fizika kursidan ma’lum.

Endi yuqoridagi shartlardan kuch kattaligi o‘zgarmas degan shartdan voz kechib, u harakatning har bir $x$ nuqtasida biror uzluksiz $f(x)$ funksiya bo‘yicha o‘zgarib boradigan umumiyroq holni qaraymiz. Bu holda kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan $A$ ishni hisoblash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalani yechish uchun moddiy nuqtani bosib o‘tgan yo‘lini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani oldingi masaladagi singari $n$ ta bo‘laklarga ajratib, har bir $[x_{i–1}, x_i]$ ($i$=1,2,

... , $n$) kichik kesmada o‘zgaruvchi kuchning bajargan ishini $\Delta A_i$ deb belgilaymiz. Bu holda $[a, b]$ kesmada bajarilgan umumiy $A$ ish qiymatini

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

yig‘indi ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda ham $\Delta A_i$ ishning aniq qiymatini hisoblay olmaymiz. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning har biridan ixtiyoriy $\xi_i$ nuqtani tanlab olamiz va unda kuchning $f(\xi_i)$ qiymatini hisoblaymiz. Uzunligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bo‘lgan bu kichik kesmada kuch kattaligi o‘zgarmas va $f(\xi_i)$ deb hisoblab, ushbu taqribiy tengliklarni yoza olamiz:

$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\cdot \Delta x_1$, $\Delta A_2 \approx f(\xi_2)\cdot \Delta x_2$, …, $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$, …, $\Delta A_n \approx f(\xi_n)\cdot \Delta x_n$.

Bularni yuqoridagi yig‘indiga qo‘yib, izlanayotgan $A$ ishning taqribiy qiymatini topamiz:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Bu yerda ham $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘laklar soni $n$ oshib borgan sari (5) taqribiy tenglik xatoligi tobora kamayib boradi deb kutish mumkin. Shu sababli $A$ ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

limit orqali ifodalanadi.

Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani hisoblash. Ma’lumki, biror $v$ o‘zgarmas tezlik bilan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan $s$ masofasi $s=v(b-a)$ formula bilan hisoblanadi. Endi tezligi har bir $t$ vaqtda o‘zgaruvchan va $v=v(t)$ funksiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tadigan $s$masofani hisoblash masalasini ko‘ramiz. Buning uchun $[a,b]$ vaqt oraligini $a=t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy $n$ bo‘lakka ajratamiz. Har bir $(t_{i-1}, t_i)$ vaqt oraliqchalari uzunliklarini $\Delta t_i$kabi belgilaymiz va undan ixtiyoriy bir $\tilde{t}_i$ nuqtani tanlaymiz. Moddiy nuqtaning $(t_{i-1}, t_i)$ vaqt oraliqchalarida bosib o‘tgan masofasini $s_i$kabi belgilab, bu vaqtda uning $v_i$ tezligi taqriban o‘zgarmas va $v_i=v(\tilde{t}_i)$deb olamiz. Bu holda $s_i \approx v_i \Delta t_i = v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ bo‘lib, bosib o‘tilgan s masofa uchun

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Bu masofaning aniq qiymatini topish maqsadida bo‘lakchalar soni $n$ ni cheksiz oshirib boramiz. Bunda $\Delta_n = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$ cheksiz kamayib boradi deb hisoblaymiz. Natijada, aniq integral ta’rifiga asosan,

ISSN 2181-3187

$$s = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} v(\tilde{t}_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Misol sifatida tezligi $v(t)=6t^2+2t$ qonun bo‘yicha o‘zgaradigan notekis harakatda [3,8] vaqt oralig‘ida bosib o‘tilgan $s$ masofani yuqoridagi formulaga asosan topamiz:

$$s = \int_3^8 (6t^2+2t)\,dt = \left(\frac{6t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}\right)\Big|_3^8 = (2t^3+t^2)\Big|_3^8 = (2*8^3+8^2)-(2*3^3+3^2) = 1088-63 = 1025.$$

Bundan tashqari aniq integral bir jinsli bo‘lmagan sim massasini, yassi chiziq va geometrik shaklning og‘irlik markazi, inersiya momentlarini hisoblash uchun ham qo‘llaniladi.

Endi aniq integralning ayrim iqtisodiy tatbiqlarini qaraymiz.

Mahsulot hajmini topish masalasi. Agar ish kuni davomida mehnat unumdorligi o‘zgarmas, ya’ni ixtiyoriy $t$ vaqtda uning kattaligi $f$ bo‘lsa, unda

($T_1$,$T_2$) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $V=f\cdot(T_2-T_1)$ formula bilan hisoblanadi. Masalan, sozlangan avtomatik qurilma uchun bu holni o‘rinli deb olish mumkin.

Ammo ishchining mehnat unumdorligi to‘g‘risida bunday deb bo‘lmaydi. Masalan, ish kunining boshlang‘ich davrida (ishga ko‘nikish) uning mehnat unumdorligi ma’lum bir vaqtgacha o‘sib boradi. So‘ngra, ishga kirishib ketgandan keyin, ma’lum bir vaqt oralig‘ida bir xil unumdorlik bilan mahsulot ishlab chiqaradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari, charchash tufayli, mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib mehnat unumdorligi o‘zgaruvchan va $t$ vaqtga bog‘liq ravishda biror uzluksiz $f(t)$ funksiya orqali aniqlangan bo‘ladi. Bu holda ($T_1$,$T_2$) vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi V uchun yuqoridagi formula o‘rinli bo‘lmasligi ravshandir va uni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala ham oldingi masalalardagi mulohazalar asosida quyidagicha yechiladi. ($T_1$,$T_2$) vaqt oralig‘ini ixtiyoriy ravishda tanlangan

$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots t_i<\cdots t_{n-1}<t_n=T_2$

nuqtalar bilan $n$ ta ($t_{i-1}$, $t_i$) ($i$=1,2,3, ⋯ , $n$) vaqt oraliqchalariga bo‘laklaymiz. Bu

vaqt oraliqchalarida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini $\Delta V_i$ ($i$=1,2,3, ⋯ , $n$) deb belgilasak, unda butun vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

yig‘indi kabi ifodalanadi. Bu yig‘indidagi qo‘shiluvchilarning taqribiy qiymatlarini topish maqsadida ($t_{i-1}$, $t_i$) ($i$=1,2,3, ⋯ , $n$) vaqt oraliqchalaridan ixtiyoriy bir $\xi_i$ vaqtni tanlab olamiz va unda $f(\xi_i)$ mehnat unumdorligini aniqlaymiz. Kichkina

$(t_{i-1}, t_i)$ oraliqda uzluksiz $f(t)$ funksiya o‘z qiymatini unchalik ko‘p o‘zgartira olmaydi va shu sababli bu yerda mehnat unumdorligini o‘zgarmas va uning qiymati $f(\xi_i)$ deb olishimiz mumkin. Shu sababli $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi uchun

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i\ , \quad i=1,2,3, \cdots , n,$$

taqribiy tengliklarni yozish mumkin. Bu taqribiy tengliklarni yuqoridagi yig‘indiga qo‘yib,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu holda mahsulot hajmining aniq qiymati

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

limit orqali topiladi.

Aniq integral tushunchasi kiritilayotganda, o‘zgaruvchan mehnat unumdorligi bo‘yicha mahsulot hajmini aniqlash masalasini ko‘rgan edik. Masalan, korxonada mehnat unumdorligi har bir ish kuni davomida z= f(t)= - $0{,}0012t^2 - 0{,}08t + 20{,}6$

$$z = f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$$

funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $0 \le t \le 8$ bo‘lib, $t$ vaqtni soatda ifodalaydi. Bu korxonaning yil (254 ish kuni) davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmini topamiz:

$$Q = 254\int_0^8(-0{,}0012t^2 - 0{,}08t + 20{,}6)dt = 254\,(-0{,}0012t^3 - 0{,}08t^2 + 20{,}6t)\Big|_0^8 = 254(-0{,}0004t^3 - 0{,}04t^2 + 20{,}6t)\Big|_0^8 = 254\,(-0{,}2048 - 2{,}56 + 164{,}8) = 41156{,}9408.$$

Demak, bu korxona bir yilda 41156 dona mahsulot ishlab chiqaradi. Biz yana bir qator iqtisodiy masalalarni aniq integral yordamida yechishimiz mumkin

Yuqoridagi fizik va iqtisodiy mazmunli turli masala bir xil matematik usulda o‘z yechimini topib bir xil limit orqali ifodalandi. Shu sababli bu usul va limitni umumiy holda qarash ma’noga egadir.

**Xulosa.** Juda ko‘p amaliy masalalarni yechish aniq integral tushunchasiga olib keladi. Masalan, geometriyada egri chiziqli trapetsiya yuzasini topish, fizikada o‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash, iqtisodiyotda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini aniqlash kabi masalalar shular jumlasidandir. Aniq integral berilgan funksiya va kesma bo‘yicha tuziladigan integral yig‘indining limiti kabi aniqlanadi. Berilgan kesmada chegaralangan va faqat chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo‘lgan funksiya uchun aniq integral mavjud bo‘ladi. Yuqorida ko‘rsatilgan masalalardan aniq integralning mexanik va iqtisodiy ma’nolari kelib chiqadi. Aniq integral qiymatini hisoblash yoki baholash uchun uning bir qator xossalaridan foydalanish mumkin.

ISSN 2181-3187

**Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. Guryev A.I., Zamonaviy ta'lim nazariyasi va amaliyotidagi fanlararo aloqalar // Zamonaviy ta'lim tizimidagi innovatsion jarayonlar. - Gorno-Altaysk, 999 - S. 160

2. Abdullayeva B.S. Fanlararo aloqadorlikning metodologik-didaktik asoslari( Ijtimoiy-gumanitar yo'nalishlardagi akademik liseylarda matematika o'qitish misolida): Ped.fan.dokt…diss. avtoref. –T., 2006, - 49 b.

3.N.P.Rasulov, I.I.Safarov. Oliy matematika. Darslik.Toshkent 2012.

4. Nasriddinov K. Fizikani o'qitish masalalar ishlash metodikasi.Toshkent: Фан ва технология, 2006.