ISSN 2181-3187

ГРАДИЕНТНО ПОДОБНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ОДНОМ БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Шопулат Шомашрабович Бабаджанов[1]

1к.-м. ф.н., доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Ташкентский финансовый институт, Узбекистан. Почта: sh.babadjanov@mail.ru ORCID: 0000-0001-5513-4442

Аннотация: построено градиентно подобное отображение для классического функционала вариационного исчисления заданного в пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций $x(s)$, удовлетворяющих условию $x(0)=x(1)=0$.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, банахово пространство, классический функционал вариационного исчисления, градиент функционала, градиентно подобное отображение.

Введение

В работах [1]-[4] исследованы следующие свойства функционалов классического вариационного исчисления в функциональных пространствах: непрерывность, сильная непрерывность, невырожденность и вырожденность критических точек, устойчивость критических точек, связь между критическими точками и решениями дифференциальных уравнений с градиентно подобными правыми частями. В работах [5]-[7] установлено, что такие же функционалы возникают при исследовании модельных нелинейных краевых задач, возникающих в математической физике. Например, в работе [7] исследования разрешимости модельной нелинейной краевой задачи

$$-\psi''(x)+\left(1+\frac{c}{x^2}\right)\psi(x)=\frac{1}{x^\alpha}|\psi(x)|^{k-1}\psi(x),\ \ x>0, \qquad (1)$$
$$\psi(0)=0,\ \ \psi(\infty)=0.$$

осуществляется с помощью исследования свойств нелинейного функционала вида

$$F_{k,\alpha}(f)=\int_0^{+\infty}\frac{|f(s)|^{k+1}}{s^\alpha}dx \qquad (2)$$

в пространстве $H_0^1=\{f: f,f'\in L_2(0,\infty),\ f(0)=0\}$.

Отметим, что различные физические модели, используемые в теории элементарных частиц ([8]), приводят к рассмотрению задачи вида (1).

ISSN 2181-3187

При исследовании свойств решений дифференциальных уравнений с градиентно подобными правыми частями возникает вопрос построении градиенто подобного отображения. В работе [4] для классического функционала вариационного исчисления

$$F(x)=\int_0^1 f(s,x(s),x'(s))ds \qquad (3)$$

заданного в банаховом пространстве

$$C_0^1=\{x\in C^1[0,1]: x(0)=x(1);\ x'(0)=x'(1)\}$$

построено градиентно подобное отображение.

Через C_*^1 обозначим банахово пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций $x(s)$, удовлетворяющих условию $x(0)= \; =x(1)=0$, т.е.

$$C_*^1=\{x\in C^1[0,1]: x(0)=x(1)=0\}$$

с нормой

$$\|x\|=\max_{0\le s\le 1}|x(s)|+\max_{0\le s\le 1}|x'(s)|.$$

В настоящей работе рассмотрим вопрос о построении градиентно подобного отображения G для функционала (3) заданного в пространстве C_*^1.

2. Построение градиентно подобного отбражения

Пусть E – банахово пространство, и $G:E\to E$ – непрерывное отображение.

Определение. Непрерывное отображение G, называется градиентно подобным отображением, если оно удовлетворяет условию:

Существует дифференцируемый по Фреше функционал $F:E\to R^1$ для которого

а) $\nabla F:E\to E^*$ – непрерывное ограниченное отображение ($\nabla F(x)$ – градиент функционала F в точке $x\in E$);

б) для любого $x\in E$ $\nabla F(x)=\Theta$ тогда и только тогда, когда $G(x)=0$;

в) значение $(\left(\nabla F(x), G(x)\right)$ функционала $\nabla F(x)$ на элементе $G(x)$ положительно: $(\nabla F(x),\ G(x))>0$ при $G(x)\neq 0$.

Заметим, что когда Eявляется гильбертовым пространством, и F - функционал, заданный в этом пространстве, сам градиент $\nabla F(x)$ служит градиентно подобным отображением для функционала F .

В дальнейшем всюду будем предполагать, что функция $f(s,x,y)$ в функционале (3) непрерывна на $[0,1]\times R^2$ и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда в каждой точке $x\in C_*^1$ существует градиент (первая производная Фреше)

$$(\nabla F(x),h)=\int_0^1 \frac{\partial f(s,x(s),x'(s))}{\partial x}h(s)+\frac{\partial f(s,x(s),x'(s))}{\partial x'}ds$$

и $\nabla F: C_*^1 \to (C_*^1)^*$ – непрерывное отображение. Для построения градиентно подобного отображения введем следующий интегральный оператор

$$\Gamma(a,b)=\int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt+\int_0^1 K_0(s,t)b(t)dt, \qquad a,b\in C[0,1]$$

где

$$K_0(s,t)=\begin{cases} t(1-s), & \text{если } 0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t), & \text{если } 0\le s\le t\le 1\end{cases} \quad \text{и} \quad K_1(s,t)=\begin{cases} 1-s, & \text{если } 0\le t\le s\le 1,\\ -s, & \text{если } 0\le s\le t\le 1.\end{cases}$$

В пространстве C_*^1 отображение G определим следующим образом

$$G(x)=\int_0^1 K_0(s,t)\frac{\partial f(t,x(t),x'(t))}{\partial x}dt+\int_0^1 K_1(s,t)\frac{\partial f(t,x(t),x'(t))}{\partial x'}dt\equiv \Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'},\frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{5}$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема. Отображение G непрерывно действует из C_*^1 в C_*^1 и удовлетворяет условиям б), в).

Если к тому же функции $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ по переменным x и y удовлетворяет локальному условию Липшица, то отображение G удовлетворяет локальному условию Липшица.

Таким образом, отображение G, определяемое формулой (5), является градиентно подобным отображением для функционала (3).

Обсуждение

В качестве обсуждения докажем сформулированную в предыдущем разделе теорему. Верна следующая лемма.

Лемма. Оператор Γ непрерывно действует из C_*^1 в C_*^1. Если $a(t)$, $b(t)\in C[0,1]$, то функция $y(s)=\Gamma(a,b)(s)$ является единственным решением задачи

$$y'=c(s)-\bar{c}, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0, \tag{4}$$

где $c(s)=a(s)-\int_0^s b(\tau)d\tau, \quad \bar{c}=\int_0^1 c(s)ds.$

Доказательство. Найдем общее решение дифференциального уравнения из задачи (4):

$$y(s)=c+\int_0^s (c(\tau)-\bar{c})d\tau.$$

С учетом краевых условий имеем:

$$c=0,\qquad y(s)=\int_0^s (c(\tau)-\bar{c})d\tau,$$

$$y(1)=\int_0^1 (c(\tau)-\bar{c})=\int_0^1 c(\tau)d\tau-\bar{c}=\bar{c}-\bar{c}=0\,.$$

Если $a(t)\equiv 0$, $b(t)\equiv 0$, то из

$$y'=0,\qquad y(0)=0;\qquad y(1)=0$$

следует, что $y(t)=0$, т.е. решение задачи (4) единственно. Таким образом,

$$\Gamma(a,b)(s)=\int_0^s (c(\tau)-\bar{c})d\tau=\int_0^s (a(t)-\int_0^t b(\tau)d\tau dt-s\int_0^1 (a(t)-\int_0^t b(\tau)d\tau)dt=$$

$$=\int_0^s a(t)dt-s\int_0^1 a(t)dt-\int_0^s\int_0^t b(\tau)d\tau dt+s\int_0^1\int_0^t b(\tau)d\tau dt=(1-s)\int_0^s a(t)dt+s\int_s^1 a(t)dt-$$

$$-\int_0^s (1-s)\int_0^t b(\tau)d\tau dt+s\int_s^1\int_0^t b(\tau)d\tau dt=\int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt-\int_0^s (1-s)(s-t)b(t)dt+$$

$$+\int_0^s s(1-s)b(t)dt+\int_s^1 s(1-t)b(t)dt=\int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt+\int_0^s (1-s)tb(t)dt+$$

$$+\int_s^1 s(1-t)b(t)dt=\int_0^1 K_1(s,t)a(t)dt+\int_0^1 K_0(s,t)b(t)dt.$$

Для $a(t)$, $b(t)\in C[0,1]$ имеем:

$$|\Gamma(a,b)(s)|\le\int_0^1 |K_1(s,t)||a(t)|dt+\int_0^1 |K_0(s,t)||b(t)|dt\le$$

$$\le\int_0^1 |a(t)|dt+\int_0^1 |b(t)|dt\le\|a\|_{C[0,1]}+\|b\|_{C[0,1]},$$

$$|\Gamma(a,b)'(s)|\le|c(s)-\bar{c}|=\left|a(s)-\int_0^s b(\tau)d\tau-\int_0^1 c(s)ds\right|\le|a(s)|+\left|\int_0^1 b(t)dt\right|+$$

$$+\left|\int_0^1 (a(t)-\int_0^t b(\tau)d\tau)dt\right|\le 2\left(\|a\|_{C[0,1]}+\|b\|_{C[0,1]}\right);$$

$$\|\Gamma(a,b)\|\le 3\left(\|a\|_{C[0,1]}+\|b\|_{C[0,1]}\right).$$

Отсюда следует, что отображение

$$\Gamma: C[0,1]\times C[0,1]\to C^1_*$$

ISSN 2181-3187

непрерывно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу леммы очевидно, что

$$G : C_*^1 \to C_*^1$$

и непрерывно. Для любого $x \in C_*^1$ имеем:

$$(\nabla F(x), G(x)) = \int_0^1 \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x} + G(x)(s) + \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'} (G(x))'(s) ds =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^s \frac{\partial f(\tau, x(\tau), x'(\tau))}{\partial x} d\tau - \gamma \right)' G(x)(s) ds + \int_0^1 \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'} (G(x))'(s) ds =$$

$$= \int_0^1 \left(\gamma - \int_0^s \frac{\partial f(\tau, x(\tau), x'(\tau))}{\partial x} d\tau + \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'} \right) (G(x))'(s) ds.$$

Обозначим

$$b(s) = \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x}, \qquad a(s) = \frac{\partial f(s, x(s), x'(s))}{\partial x'}$$

и положим $\quad c(s) = a(s) - \int_0^s b(\tau) d\tau \quad$ и $\quad \gamma = -\bar{c}.$

Тогда имеем

$$(\nabla F(x), G(x)) = \int_0^1 (c(s) - \bar{c}) G(x)(s) ds = \int_0^1 (\Gamma(a,b))'(s)(G(x))'(s) ds =$$

$$= \int_0^1 \left(\Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)' (s)(G(x))'(s) ds = \int_0^1 (G(x))(s))^2 ds.$$

Следовательно,

$$(\nabla F(x), G(x)) = \int_0^1 ((G(x))'(s))^2 ds \text{ для любого } x \in C_*^1.$$

Отсюда, если $(\nabla F(x), G(x)) = 0,$ то $G(x)(s) \equiv const$ и так как $G(x)(0) = G(x)(1) = 0$, поэтому $G(x)(s) \equiv 0$, т.е. условие в) выполнено.

Пусть $G(x) = \theta$. Тогда в силу выше проведенных рассуждений, для любого $h \in C_*^1$

$$(\nabla F(x), h) = \int_0^1 \left(\Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right)' (s) h'(s) ds = \int_0^1 (G(x))'(s) h'(s) ds = 0,$$

т.е. $\nabla F(x) = 0$.

Обратно, пусть $\nabla F(x) = 0$, тогда $(\nabla F(x), h) = 0$ для любого $h \in C_*^1$, т.е.

ISSN 2181-3187

$\int_0^1 (G(x))'(s)h'(s)ds = 0$ для любого $h \in C_*^1$.

Применяя лемму Дю-Буа Реймонда, получим, что $G(x) \equiv const$, но $G(x)(0) = G(x)(1) = 0$, следовательно, $G(x) \equiv 0$ т.е. условие б) выполнено.

Таким образом, мы показали, что условия б), в) выполняются.

Если функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ по переменным x и y удовлетворяет локальному условию Липшица, то из свойства оператора Γ очевидным образом вытекает, что отображение $G: C_*^1 \to C_*^1$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Теорема доказана.

Заключение

В статье для классического функционала вариационного исчисления (3) заданного в банаховом пространстве

$$C_*^1 = \{x \in C^1[0,1]: x(0) = x(1) = 0\}$$

построено градиентно подобное отображение. Сформулирована и доказана одна теорема, новизна которой состоит в том, что она обосновывает действие этого отображения в указанном банаховом пространстве и имеет основные свойства градиента.

Ранее в работе [4] для этого функционала заданного в другом банаховом пространстве

$$C_0^1 = \{x \in C^1[0,1]: x(0) = x(1);\ x'(0) = x'(1)\}$$

было построено градиентно подобное отображение.

Список литература

[1] Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа, Наука, М., 1975.

[2] Красносельский М.А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М, Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // Доклады Академии наук. 1978. Т. 240. №3. С. 530-533.

[3] Абдуваитов Х. А. К вопросу об устойчивости градиентных систем // Автомат. и телемех., 1987, № 6, 3–6.

[4] Бабаджанов Ш.Ш. Градиентно подобное отображение основного функционала вариационного исчисления в банаховом пространстве // Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 1998, № 104. С. 69-82.

ISSN 2181-3187

[5] Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. Об ограниченных решениях нелинейного уравнения Шредингера на полуоси // Дифференциальные уравнения, 2011, том 47, № 1, с. 38-49.

[6] Мухамадиев Э.М., Наимов А.Н. Асимптотика и существование ограниченных решений нелинейного уравнения Шредингера на полуоси // Дифференциальные уравнения, 2011, том 47, № 5, с. 651-656.

[7] Мухамадиев Э.М, Наимов А.Н. Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // «Математический сборник», 2011, том 202, №9, с.121-134.

[8]. Амирханов И.В, Жидков Е.П., Макаренко Г.И. Достаточное условие существования положительного частицеподобного решения нелинейного уравнения скалярного поля // Сообщения Объединенного института ядерных исследований, Р5-11705, Дубна, 1978. - 16 с.