ISSN 2181-3187

NOLLARI MAVJUD BUTUN FUNKSIYANING XOSSALARI

Iskandarova Muqaddas Adilbekovna
Urganch Ranch texnologiya universiteti Iqtisodiyot va mashinasozik texnologiyasi Pedagogika va filologiya kafedrasi o'qituvchisi
Ro'zimova Sarvinoz Jumanazar qizi
UrDU talabasi

Kalit so'zlar: funksiya, hosila, uzluksiz funksiya, ko'phad.

Annotatsiya: Ushbu maqolada Differiensial hisob haqidagi bazi teoremalar keltirilgan bo'lib,ular yordamida bir qancha masalalarni yechish usullari keltirilgan.

Biz ushbu maqolada masalalarni yechish jarayonida asosan quyidagi ikkita teoremadan foydalanamiz:

1-Teorema (Balsano-Koshi teoremasi)[1]. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bolib,quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x)\in[a,b]$;

2) Segmentning chetki nuqtalari a va b larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya'ni

$f(a)<0<f(b)$ yoki $f(a)>0>f(b)$

bo'lsin.

U holda shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki $f(c)=0$ bo'ladi.

2-Teorema(Roll teoremasi) Faraz qilaylik $f(x)$ funhsiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lib,quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x)\in C[a,b]$;

2) $\forall x\in(a,b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli;

3) $f(a)=f(b)$ bo'lsin.

U holda shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, $f'(c)=0$ bo'ladi.

Biz qaraydigan masalallar faqat ko'phadlarga doir bo'lganligi uchun keyingi qatorlarda Teorema 1 ni 1-sharti, Teorema 2 ni esa 1-va 2- shartlarini tekshirmaymiz.

1-Lemma. Itiyoriy toq darajali ko'phad kamida bitta haqiqiy ildizga ega.

[1] Matematik analiz I-qism ,Azlarov T.A, X.Mansurov , Toshkent,"O'qituvchi" nashriyoti, 165-166 bet,1986 y

ISSN 2181-3187

Isbot. Bizga toq darajali $p(x)$ ko'phad berilgan bo'lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda uning bosh koffitsientini musbat deb faraz qilishimiz mumku.U holda quyidagi munosabatarga egamiz:

$\lim\limits_{n\to\infty} p(x) = -\infty$ va $\lim\limits_{n\to\infty} p(x) = +\infty$

Bundan uzluksiz funksiyalarda limit xossalariga ko'ra shunday $a<0$ va $b>0$ sonlari topiladiki ular uchun mos ravishda $p(a)<0$ va $p(b)>0$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak $f(x)=p(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda Teorema 1 ning barcha shartlari qanoatlantrar ekan ,bundan biror $c\in(a,b)$ soni uchun $p(c)=f(c)=0$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

2-Lemma. Agar $p(x)$ ko'pxad karrasi bilan xisoblaganda n ta haqiqiy ildizga bo'lsa, u holda $p'(x)$ ko'phad kamida karrasi bilan xisoblaganda $n-1$ ta haqiqiy ildizga ega bo'ladi.

Isbot. Ko'phadning haqiqiy ildizlari $x_1, x_2, ... x_n$ bo'lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $x_1 \le x_2 \le ...... \le x_n$ deb faraz qilishimiz mumkun. Quyidagi ikkita holat bo'lishi mumkin :

1)Biror i (lar) uchun $x_i < x_{i+1}$ .U holda $p(x_i)=p(x_{i+1})=0$ ekanligini inobatga olsak,Teorema 2 ko'ra shunday $y_i\in(x_i,x_{i+1})$ topiladiki bu uchun $p'(y_i)=0$ munosabat o'rinli bo'ladi;

2)Biror i (lar) uchun $x_i = x_{i+1}$. U holda Bezu teoremasiga ko'ra ushbu $p(x)=(x-x_i)^2\cdot q(x)$ tenglikni qanoatlantruvchi $q(x)$ ko'phad mavjud bo'ladi. Bundan

$$p'(x)=(x-x_i)\partial\cdot[2\cdot q(x)+(x-x_i)\cdot q'(x)]$$

tenglikka ega bo'lamiz .Demak $y_i = x_i (= x_{i+1})$ soni uchun $p'(y_i)=0$ tenglik o'rinli ekan..

Har ikkala holatda ham $p'(y_i)=0$ tenglikni qanoatlantruvchi $y_i\in[x_i,x_{i+1}]$ soni topildi , bu yerda $i=1,......,n-1$ (jami n-1 ta)..

1-Masala[2]. Agar $a_0, a_1, ..., a_n$ sonlari uchun $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ tenglik o'rinli bo'lsa , $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ko'phad (0,1) intervalda kamida bitta haqiqiy ildizga ega bo'lishini isbotlang.

Yechim. Quyidagi

[2] Избраные задачи (из журнала American Mathematical Montly).-М.:Мир,1977

ISSN 2181-3187

$$q(x)=\frac{a_0}{n+1}\cdot x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}\cdot x^2+a_n\cdot x$$

Ko'phadni qaraylik.Bundan $q(0)=0$ va masala shartidagi tenglikka ko'ra $q(1)=0$ munosabatlar bajarilishini ko'rish qiyin emas.Demak $q(0)=q(1)$ ekan , bundan 2-Teoremaga ko'ra $c\in(0,1)$ topilib $q'(c)=0$ bo'ladi.Endi $q'(x)=p(x)$ tenglikni inobatga olsak bo'ladi..

2-Masala . $a_1,a_2,\ldots,a_n$ noldan farqli turli haqiqiy sonlar uchun quyidagi

$$\frac{a_1}{a_1+x}+\frac{a_2}{a_2+x}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+x}=n$$

Tenglama n ta haqiqiy ildizga ega ekanligini isbotlang.

Yechim. Tenglamani boshqacha ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{a_1}{a_1+x}-1+\frac{a_2}{a_2+x}-1+\ldots+\frac{a_n}{a_n+x}-1=n$$

yoki

$$x\cdot\left[\frac{1}{a_1+x}+\frac{1}{a_2+x}+\ldots+\frac{1}{a_n+x}\right]=0$$

Endi $p(x)=(x+a_i)\cdot(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)$ deb belgilash kiritsak, tenglamani quyidagi

$$x\cdot\frac{p'(x)}{p(x)}=0$$

Ko'rinishiga kelishni ko'rish qiyin emas. Bu yerda $p(x)$ aniqlanishiga ko'ra n ta turli haqiqiy ildizga ega ($-a_i$ lar), demak 2-Lemmaga ko'ra $p'(x)$ ko'phad $n-1$ ta turli haqiqiy ildizga ega bo'ladi , bunda $p'(x)$ ni ildizlari $-a_i$ lar turli bo'lganligi uchun ular bilan ustma- ust tushmaydi va turli bo'ladi (Lemma 2 ni isboti 1 holi).Demak suatdagi $p'(x)$ ko'phad hisobiga tenglamada $n-1$ ta turli haqiqiy ildiz bor(yechimlari ichida 0 yo'qligini ko'rsatish oson), va $n-$ ildiz esa ko'aytmdagi x hisobiga 0 bo'ladii..

3-Masala . Agar $1,a_2,\ldots,a_n$,$n\geq 2$ haqiqiy sonlar uchun quyidagi

$$p(x)=x^n+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ko'phad n ta haqiqiy ildizga ega bo'lsa , $a_2\leq 0$ ekanligini isbotlang.

Yechim. Teskarisini faraz qilamiz ,ya'ni $a_2\geq 0$ bo'lsin.Endi Lemma 2 ni $n-2$ marta quyidagicha qo'llaymiz:

$p(x)$ da n ta haqiqiy ildiz $\Rightarrow p'(x)$ da (kamida) $n-1$ ta haqiqiy ildiz $\Rightarrow p''(x)$ da (kamida) $n-2$ ta haqiqiy ildiz $\Rightarrow\ldots\Rightarrow p^{(n-2)}(x)$ da esa (kamida) 2 ta haqiqiy ildiz.

ISSN 2181-3187

Boshqa tomondan farazimizga ko’ra $(a_2 > 0)$

$$p^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}\left(x^2 + \frac{a_2}{n(n-1)}\right) > \frac{n!}{2}\cdot\frac{a_2}{n(n-1)} > 0$$

Tengsizlik bizda bor (ya’ni $p^{(n-2)}(x)$ ko’phad haqiqiy ildizga ega emas).Bu esa ziddiyat ,demak $a_2 \leq 0$ bo’lish kerak ekan.

4-Masala[3]**.** Agar darajasi n ga teng bo‘lgan haqiqiy koeffitsientli $p(x)$ ko‘phad n ta haqiqiy ildizga ega bo‘lsa, u holda noldan farqli bo‘lgan ixtiyoriy α haqiqiy soni uchun $p'(x)+\alpha\cdot p(x)$ ko‘phad ham n ta haqiqiy ildizga ega bo‘lishini isbotlang.

Yechim. Ushbu $f(x)=e^{\alpha x}\cdot p(x)$ funksiyani qaraylik. Bunda $e^{\alpha x}$ ni haqiqiy ildizga ega emas ekanligini inobatga olsak , $f(x)$ funksiya ham aynan n ta haqiqiy ildizga ega bo’lishi kelib chiqadi.Shu yerda Lemma 2 kabi yo’l tutib $f'(x)$ ni kamida $n-1$ ta haqiqiy ildiga ega ekanligini ko’rsatish mumkun (mustaqil harakat qilib ko’ring).

Bshqa tomondan

$$f'(x)=e^{\alpha x}\cdot\left(p'(x)+\alpha\cdot p(x)\right)$$

tenglik bizda bor. Bu yerda ham $e^{\alpha x}$ haqiqiy ildizga ega bo‘lmaganligi uchun, barchahaqiqiy ildizlar ko‘paytmadagi $p'(x)+\alpha\cdot p(x)$ ko‘phadga tegishli ekanligini ko‘rish mumkin. Biz bu darajasi n ga teng bo‘lgan $p'(x)+\alpha\cdot p(x)$ ko‘phadni kamida $n-1$ ta haqiqiy yechimga ega ekanligini “ko‘rsatgan edik”, bundan Bezu teoremasiga ko‘ra ko‘paytuvchilarga ajratsak so‘ngi ko‘paytmada chiziqli funksiya qoladi. Endi chiziqli funksiya har doim haqiqiy ildizga ega ekanligini inobatga olsak, $n-$ inchi haqiqiy ildizni mavjud bo‘lishini isbotlagan bo‘lamiz.

5-Masala. Darajasi n ga teng bo’lgan $p(x)$ ko’phad uchun ushbu

$$q(x)=p(x)+\frac{p'(x)}{2}+\ldots+\frac{p^{(n)}(x)}{2^2}$$

Ko’phadni qaraylik. Agar $q(x)$ ni barcha ildizlari haqiqiy bo’lsa , $p(x)$ ning ham barcha ildizlari haqiqiy bo’lishini isbotlang.

Ko’rsatma. Masala 4 dagi kabi yordamchi funksiya quring : $f(x)=e^{-2x}\cdot q(x)$.

[3] Бончковский Р.Н. Вторая Московская математическая олимпиада,1936,т.II, с.275-278

ISSN 2181-3187

6-Masala. Bizga barcha ildizlari haqiqiy bo'lgan $p(x)$ ko'phad berilgan bo'lsin. Agar biror a soni $p'(x)$ ko'phadning karrali ildizli bo'lsa p(a)=0 ekanligini isbotlang.

7-Masala[4]. Agar $p(x)$ ko'phad haqiqiy ildizga ega bo'lmasa , u holda quyidagi

$$p(x)+\frac{p''(x)}{2!}+\frac{p^{(4)}(x)}{4!}+\ldots+$$

ko'phad ham haqiqiy ildizga ega emasligini isbotlang.

Yechim. Teylor formulasidan foydalanamiz. $p(x)$ ko'phad bo'lganligi uchun uning ixtiyoriy nuqtadagi yoyilmasi o'zi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni

$$p(x+\Delta x)=p(x)+p'(x)\cdot\Delta x+\frac{p''(x)}{2!}\cdot(\Delta x)^2+\ldots$$

tengli o'rinli .Oxirgi tenglikda $\Delta x=-1$ desak:

$$p(x-1)=p(x)-p'(x)+\frac{p''(x)}{2!}+\ldots$$

tenglikda , $\Delta x=1$ desak esa:

$$p(x+1)=p(x)+p'(x)+\frac{p''(x)}{2!}+\ldots$$

tenglikka ega bo'lamiz .Ularni qo'shib ikkiga bo'lsak , ushbu

$$\frac{p(x+1)+p(x-1)}{2}=p(x)+\frac{p''(x)}{2!}+\frac{p^{(4)}(x)}{4!}+\ldots+$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bizda $p(x)$ ko'phad haqiqiy ildizga ega emas edi, demak u har doim ishorasini saqlaydi, bundan $p(x+1)+p(x-1)$ ifoda ham har doim ishora saqlashi kelib chiqadi, demak hosil bo'lgan ko'phad ham haqiqiy ildizga ega emas.

8-Masala. $a_1,a_2,\ldots,a_n$ musbat sonlari uchun quyidagi

$$p(x)=x^n-a_1x^{n-1}-\ldots-a_{n-1}x-a_n$$

ko'phad faqat bitta musbat ildizga ega bo'lishini isbotlang.

Yechim. Masala shartiga ko'ra $p(0)=-a_n<0$ tengsizlik bizda bor , boshqa tomondan esa $\lim\limits_{n\to\infty}p(x)=+\infty$ munosabatiga egamiz , bunday uzluksiz funksiyalarda limit xossalariga ko'ra shunday $b>0$ son topiladiki $p(b)>0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.Demak Teorema 1 ga ko'ra $p(x)$ ko'bhad $(0,b)$ intervalida kamida bitta musbat ildizga ega ekan . Endi musbat ildiz yagona ekanligi Matematik induksiyadan foydalanib isbotlaymiz :

i. $n=1$ da o'rinli;

[4]. Practice problems for the Math Olympiad , P. Gracia, D.Klein, L.Luxemburg, L. Qiu, J. Szucs, 2019 year

ii. $n = k-1$ da o'rinli bo'lsin ,ya'ni :ixtiyoriy $b_1,...,b_{k-1}$ musbat sonlar uchun quyidagi

$$q(x) = x^{n-1} - b_1 x^{n-2} - ... - b_{n-1}$$

ko'phad faqat bitta musbat ildizga ega.

iii. $n = k$ da . Teskarisini faraz qilaylik , ya'ni musbat ildizlari soni bittadan ko'p bo'lsin . Viet teoremasiga ko'ra tenglamaning ildizlari ko'paytmasi $-a_n$ ga teng ekanligi bizda bor ,ya'ni manfiy son . Bu yerda agar biroz z_1 kompleks sonni $p(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsin desak ,u holda ko'phad haqiqiy koeffitsientli bo'lganligi uchun $\overline{z_1}$ ham uning ildizi bo;lishi ham kelib chiqadi ,demak Bezu teoremasiga ko'ra

$$(x - z_1)\cdot(x + \overline{z_1}) = x^2 - (z + \overline{z_1})\cdot x + |z_1|^2$$

ifoda $p(x)$ ni bo'luvchisi bo'ladi . Endi bu ifodaning ozod hadi uchun $|z_1|^2 > 0$ tengsizlikni o'rinli bo'lishini inobatga olsak , kompleks ildizlar ko'paytmasi ko'phadning ildizlari ko'paytmasini (yoki ozod hadini) ishorasiga ta'sir qilmasligini ko'ramiz.Demak yuqoridagi manfiy ishorani uning haqiqiy ildizlari ko'paytmasi hosil qilar ekan ,bundan ko'phadni musbat haqiqiy ildizlari soni toq bo'lishi kelib chiqadi.Bizni farazimizga ko'ra musbat ildizlar soni bittadan ko'p edi, boshqa tomandan musbat ildizlari soni toq bo'lishini isbotladik demak berilgan ko'phad kamida uchta musbat ildizga ega bo'lishi kerak ekan.Bu ildizlar $0 < x_1 \le x_2 \le x_3$ bo'lsin.Bundan $0 < y_1 \le y_2$ sonlari topilib $p'(y_1) = p'(y_2) = 0$ shartni qanoatlantrishini ko'rsatishimiz mumkun.(aniqroq aytsak $0 < x_1 \le y_1 \le x_2 \le y_2 \le x_3$),ya'ni $p'(x)$ ko'proq (kamida) ikkita musbat ildizga ega .Bu esa induksiya qadamiga zid ,chunki $p'(x)$ induksiyaga nisbatan o'z ko'rinishini saqlaydi va shuning uchun ham u faqatgina bitta musbat ildizga ega bo'lishi mumkun .Demak faraz xato.

Izoh. Induksiyaga nisbatan o'z ko'rinishini saqlaydi deganda quyidagi nazarda tutiladi:

Agar $b_1 = \dfrac{(n-1)a_1}{n},...,b_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ kabi belgilash kiritsak $b_i > 0$ bo'ladi va

$$p'(x) = nx^{n-1} - (n-1)a_1 x^{n-2} - ... - a_{n-1} = n\cdot(x^{n-1} - b_1\cdot x^{n-2} - ... - b_{n-1})$$

tenglik o'rinli , ya'ni induksiya qadamiga tushadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1.Matematik analiz I-qism ,Azlarov T.A, Mansurov X , "O'qituvchi" nashriyoti, 1986

2. Математика в школе 1989 г номер 4

3. Дюдени Г.Э. 520 головоломок.-М.:Мир 1975

ISSN 2181-3187

4.Избраные задачи (из журнала American Mathematical Montly).- М.:Мир,1977

5.Бончковский Р.Н. Вторая Московская математическая олимпиада,1936,т.II, с.275-278

6. Practice problems for the Math Olympiad , P. Gracia, D.Klein, L.Luxemburg, L. Qiu, J. Szucs, 2019 year

7.IMO shortlisted problems (with solutions) 60th International Mathematical Olympiad Bath — UK, 11th–22nd July 2019