TRIGONOMETRIK TENGLAMALAR

Rejabova Gulnoza Yuldashevna
Izboskan tuman 2-son kasb-hunar maktabi
Matematika fani o'qituvchisi

Annotasiya. Maqolada trigonometrik funksiyalarning kelib chiqishi tarixi haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlar keltirilgan. Trigonometrik funksiyalarning davri, aniqlanish sohasi, triganometrik ifodalarni yig'indidan ko'paytmaga o'tish formulalari keltirilib, ularga doir misollarni yechish yo'llari yoritilgan.

Kalit so'zlar: trigonometriya, funksiya, davr, trigonometrik yig'indi, aniqlanish sohasi, argument, tenglamalar bir jinsli, daraja pasaytirish.

Eramizdan oldingi asrlarda trigonometriya astronomiya, geodeziya va qurilish ehtiyojlari bilan bog'liq holda paydo bo'lgan, ya'ni u faqat geometrik xususiyatga ega bo'lib, asosan «akkordlar hisobi» ni ifodalagan. Vaqt o'tishi bilan ba'zi tahliliy fikrlar unga aralasha boshladi. XVIII asrning birinchi yarmida keskin burilish yuz berdi, shundan so'ng trigonometriya yangi yo'nalish oldi va matematik analizga o'tdi.

Tarixan trigonometrik tenglamalar va tengsizliklar maktab o'quv dasturida alohida o'rin tutgan. Hatto yunonlar ham trigonometriyani fanlarning eng muhimi deb hisoblashgan. Shuning uchun biz, qadimgi yunonlar bilan bahslashmasdan, trigonometriyani maktab kursining va umuman butun matematika fanining eng muhim bo'limlaridan biri deb hisoblaymiz.

Bir necha o'n yillar davomida maktab matematika kursining alohida fani sifatida trigonometriya mavjud emas edi, u asta-sekin nafaqat asosiy maktabning geometriya va algebrasida, balki algebra va matematik tahlilning boshlanishiga ham tarqaldi.

Trigonometrik tenglamalar maktab matematika kursining eng qiyin mavzularidan biridir. Trigonometrik tenglamalar planimetriya, astronomiya, fizika va boshqa sohalardagi masalalarni yechishda yuzaga keladi. Trigonometrik tenglamalar va tengsizliklar yildan-yilga markazlashtirilgan test vazifalari orasida ham topiladi.

Trigonometrik tenglamalarning algebraik tenglamalardan eng muhim farqi shundaki, algebraik tenglamalar chekli sonli ildizlarga ega, trigonometrik tenglamalar esa cheksiz yechimlarga ega, bu esa ildizlarni tanlashni ancha murakkablashtiradi. Trigonometrik tenglamalarning yana bir o'ziga xos xususiyati javob yozishning o'ziga xos bo'lmagan shak lidir.

O'quv, ilmiy va uslubiy adabiyotlar asosida trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarga oid asosiy nazariy ma'lumotlarni maktab matematika kursida

ISSN 2181-3187

mavzularni taqdim etishda e'tibor berishingiz kerak bo'lgan umumiy uslubiy qoidalari mavjud.

Bu ishning amaliy ahamiyati shundaki, undan maktab o'qituvchilari uchun trigonometriya darslarini rejalashtirish va o'tkazishda o'quv qo'llanma sifatida foydalanish mumkin.

Elementar trigonometrik tenglamalar $f(kx+b)=a$ ko'rinishdagi tenglamalar bo'lib, bunda $f(x)$ trigonometrik funksiyalar: $sinx$, $cosx$, tgx , $ctgx$hisoblanadi. Elementar trigonometrik tenglamalar cheksiz ko'p ildizlarga ega.

Misol uchun quyidagi sonlar $sin\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tenglamaning ildizi bo'la oladi;

$x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{7\pi}{4}$, $x_4 = \frac{\pi}{4} + 2\pi$

va h.k. Tenglamaning barcha ildizlari topiladigan umumiy formula

sin x = a , |a| ≤ 1

x $=(-1)^n$ arcsin a + $2\pi n$, $n \in$ Z

bilan beriladi.

Bu yerda n har qanday butun son qiymatlarni qabul qilishi mumkin, ularning har biri ushbu formuladagi tenglamaning ma'lum bir ildiziga mos keladi. Shuningdek, elementar trigonometrik tenglamalar hal qilinadigan boshqa formulalarda n parametr deyiladi. Ular odatda n ∈ Z deb yoziladi va shu bilan n parametri har qanday butun qiymatlarni qabul qilishi mumkin.

cos x = a , |a| ≤ 1 tenglama yechimlari quyidagi formula bo'yicha topiladi:

x = ± arccos a + πn , $n\epsilon Z$.

tg x = a tenglamaning yechimlari quyidagi formula orqali topiladi

x = arctg a + πn , $n\epsilon Z$.

ctg x = a tenglamaning yechimlari quyidagi formula orqali topiladi

x = arcctg a + πn , $n\epsilon Z$.

Elementar trigonometrik tenglamalarning ba'zi maxsus holatlariga alohida e'tibor qaratish lozim, bunda yechim umumiy formulalardan foydalanmasdan yozilishi mumkin:

sin x = 0 , x = πn , $n \in$ Z,

sin x = 1 , x $= \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in$ Z,

sin x = −1 , x $= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in$ Z,

cos x = 0 , x $= \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in$ Z,

cos x = 1 , x = $2\pi n$, $n \in$ Z,

cos x = −1 , x = π + $2\pi n$, $n \in$ Z,

tg x = 0 , x = πn , $n \in$ Z,

tg x = 1 , x $= \frac{\pi}{2}$π+ πn , $n \in$ Z,

ISSN 2181-3187

tg x = −1 , $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$,

ctg x = 0 , $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$,

ctg x = 1 , $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$,

ctg x = −1 , $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ushbu tenglamalarga alohida e'tibor berish kerak, chunki ulardan boshqa trigonometrik tenglamalarni yechishda foydalanish mumkin. O'quvchilarda eng oddiy tenglamalarning har birini yechish sxemalari bo'lsa yaxshi bo'ladi.

Davriylik

Trigonometrik tenglamalarni yechishda trigonometrik funksiyalar davri muhim rol o'ynaydi. Shuning uchun o'quvchilar ikkita foydali teoremani bilishlari kerak:

Teorema. Agar T $f(x)$ funksiyaning bosh davri bo'lsa, T/k soni $f(kx+b)$ funksiyaning bosh davri hisoblanadi.

T_1va T_2 funksiyaning davrlari $mT_1 = nT_2 = T$ bo'ladigan m va n natural sonlar mavjud bo'lsa, o'lchovli deyiladi.

Teorema. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ davriy funksiyalarda T_1va T_2taqqoslanadigan bo'lsa, u holda ular $f_1(x) + f_2(x)$ funksiyaning davri bo'lgan $mT_1 = nT_2 = T$ umumiy davriga ega bo'ladi.

Aniqlanish sohasi

Har qanday haqiqiy son birlik doiradagi nuqtaga mos keladi. Bu nuqtaning koordinatalari berilgan haqiqiy sonning kosinus va sinus qiymati hisoblanadi. Birlik doiraning istalgan uqtasining koordinatalarini har doim aniqlash mumkin bo'lganligi sababli, har qanday haqiqiy x uchun $sinx$ va $cosx$ ning mos qiymatini topish mumkin, ya'ni $y = sinx$ va $y = cosx$ x ning istalgan haqiqiy qiymati aniqlanadi.

$y = tgx$ funktsiyalarining aniqlanish sohasini belgilash orqali shuni k o'rsatish kerakki, agar $x = \pi/2 + \pi n$ bo'lsa, bu burchaklarning yon tomoni, tangens o'qi bo'ladi. Shuning uchun argumentning ushbu qiymatlari uchun $y = tgx$ funksiyaning mos qiymatini belgilash mumkin emas.

Triganometrik tenglamalarni ko'paytuvchilarga ajratib yechish usullari

Ko'paytuvchilarga ajratish usuli quyidagicha:

$f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_n(x)$, $f(x) = 0$

tenglamaning istalgan yechimi $f_1(x)$ tenglamalar to'plamining yechimi

$f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, … , $f_n(x)=0$

hisoblanadi.

Qarama-qarshi tasdiq, umuman olganda, to'g'ri emas: ko'paytuvchilarga ajratishning har bir yechimi tenglamaning yechimi emas. Bu alohida tenglamalar

ISSN 2181-3187

yechimlari $f(x)$ funksiyani aniqlash sohasiga kirmasligi mumkinligi bilan izohlanadi.

Bunday turdagi tenglamalarni yechishda algebraik ifodalarni ko'paytuvchilarga jratishning barcha ma'lum usullaridan foydalanish kerak. Bu umumiy omilni qavslash, guruhlash, qisqartirilgan ko'paytirish va bo'lish formulalarini qo'llash.

Misol: Tenglamani yeching $sin^2 2x - sin2x = 0$.

Yechish: $sin2x(sin2x - 1) = 0$,

$sin2x = 0$ va $sin2x - 1 = 0$

$x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ va $sin2x = 1$,

$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$,

Javob: $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

Misol : Tenglamani yeching: $2ctg3xcos2x + 4cos2x - ctg3x - 2 = 0$.

Yechish:

$(2ctg3xcos2x - ctg3x) + (4cos2x - 2) = 0$,

$ctg3x\,(2cos2x - 1) + 2(2cos2x - 1) = 0$,

$(2cos2x - 1)(2ctg3x + 2)$,

$(2cos2x - 1) = 0$ va $(ctg3x + 2) = 0$,

$2cos2x = 1$ va $ctg3x = -2$,

$cos2x = \frac{1}{2}$ va $x_1 = \frac{1}{3}(arcctg(-2) + \pi n)$, $n \in Z$.

$x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

Javob: $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, $x_2 = \frac{1}{3}(arcctg(-2) + \pi n)$, $n \in Z$.

Trigonometrik ifodalarni yig'indidan ko'paytmaga o'tish formulalari

Trigonometrik tenglamalarni yechishda quyidagi formulalar ishlatiladi:

$sinx + siny = 2\,sin\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2}$;

$sinx - siny = 2\,sin\frac{x-y}{2} \cdot cos\frac{x+y}{2}$;

$cosx + cosy = 2\,cos\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2}$;

$cosx - cosy = -2\,sin\frac{x+y}{2} \cdot sin\frac{x-y}{2}$;

$tg\,x + tgy = \frac{sin\,(x+y)}{cosxcosy}$;

$tg\,x - tgy = \frac{sin\,(x-y)}{cosxcosy}$;

$ctg\,x + ctgy = \frac{sin\,(x+y)}{sinxsiny}$;

$ctg\,x - ctgy = \frac{sin\,(x-y)}{sinxsiny}$.

Misol : Tenglamani yeching: $sin4x - sin6x = 0$.

Yechish: Trigonometrik funksiyalar ayirmasining formulasini qo'llaymiz va

ISSN 2181-3187

biz quyidagilarni olamiz:

$2\ sin\frac{4x-6x}{2}\cdot\ cos\frac{4x-6x}{2}=0$

$sin(-x)=0$ va $\cos 5x=0$,

$sinx=0,\ 5x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,$

$x_1=\pi n,\ n\in Z\ \ x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z;$

J a v o b : $x_1=\pi n,\ n\in Z\ \ x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z;$

Trigonometrik funksiyalarning ko' paytmasini yig' indiga aylantirish orqali tenglamalarni yechish

Bir qator tenglamalarni echishda quyidagi formulalar qo'llaniladi:

$sinx\cdot cosy=\frac{sin\ (x-y)+sin\ (x+y)}{2};$

$cosx\cdot cosy=\frac{(cos\ (x-y)+cos\ (x+y)}{2};$

$sinx\cdot siny=\frac{(cos\ (x-y)-cos\ (x+y)}{2}$

Misol : Tenglamani yeching: $2sin3xcos2x=sin5x.$

Yechish: Birinchi formuladan foydalanib, quyidagi tenglamani olamiz:

$\frac{sin(3x-2x)+sin(3x+2x)}{2}=sin5x,$

$sinx+sin5x-sin5x=0,$

$sinx=0,$

$x=\pi n,\ n\in Z.$

J a v o b : $x=\pi n,\ n\in Z.$

Tenglamalarni daraja pasaytirish formulalari yordamida yechish

Keng diapazondagi trigonometrik tenglamalarni yechishda darajani pasaytirish formulalari asosiy rol o'ynaydi:

$sin^2x=\frac{1-cos2x}{2};$

$cos^2x=\frac{1+cos2x}{2};$

$tg^2x=\frac{1-cos2x}{1+cos2x}.$

Ushbu formulalarni yaxshiroq o'zlashtirish va mustahkamlash uchun o'quvchilar bilan bir nechta tenglamalarni yechish kerak.

Misol : Tenglamani yeching: $4cos^22x-1=cos4x.$

$4\cdot\frac{1+cos4x}{2}-1=cos4x,$

$2+2cos4x-1=cos4x,$

$cos4x=-1\Rightarrow 4x=\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

Javob: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$

ISSN 2181-3187

Uchlangan burchak argumentli formulalar yordamida tenglamalarni yechish

Bir qator tenglamalarni yechishda uchlangan burchak argument formulalari qo'llaniladi:

$sin3x = 3sinx - 4\, sin^3 x;$

$cos3x = 4\, cos^3 x - 3cosx;$

$tg3x = \frac{3tgx - tg^3x}{1-3tg^2x};$

$ctg3x = \frac{ctg^3x - 3ctgx}{3ctg^2x - 1}$

Misol 11: Tenglamani yeching: $\cos 3x + 2\cos x = 0$.

$\cos x\,(4\cos^2 x - 1) = 0 \Longrightarrow \cos x\,(\cos 2x + \frac{1}{2}) = 0.$

Javob: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k;\quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$

XULOSA

Ushbu masalalar bo'yicha tegishli uslubiy adabiyotlar bilan tanishib chiqib, maktab algebra kursida trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarni yechish qobiliyati va ko'nikmalari juda muhim bo'lib, ularni rivojlantirish matematika o'qituvchisidan katta kuch talab qiladi degan xulosaga kelish mumkin.

O'qituvchining o'zi trigonometrik tenglamalar va tengsizliklarni yechish bo'yicha ko'nikma va malakalarinini rivojlantirish usullarini yetarli darajada bilishi shart.

Shubhasiz, faqat zamonaviy darsliklar mualliflari tomonidan taklif qilingan vositalar va usullardan foydalangan holda belgilangan maqsadga erishish deyarli mumkin emas. Bu o'quvchilarning individual xususiyatlari bilan bog'liq. Darhaqiqat, ularning trigonometriya bo'yicha asosiy bilimlari darajasiga qarab, turli darajadagi tenglamalar va tengsizliklarni o'rganish uchun imkoniyatlar qatori quriladi.

Shuning uchun o'qituvchining oldida ko'rib chiqilayotgan muammolarni hal qilish usullari asosida o'rganilayotgan materialning g'oyalarini aniqlash, ularni keyinchalik umumlashtirish va tizimlashtirish uchun juda qiyin muammo turibdi. Bu nazariyani o'quvchilarning ongli ravishda o'zlashtirishi uchun ham, matematik muammolarni hal qilishning bir qancha umumiy usullarini o'zlashtirish uchun ham muhimdir. Maqolada foydalanilgani kabi ilg'or pedagogik texnologiyalar va trigonometrik funksiyalar qatnash gan ilmiy izlanishlar [1-33] maqolalarda keng yoritilgan.Shuni ham ta'kidlash kerakki, trigonometrik tenglamalarni yechish trigonometriya materialiga oid o'quvchilar bilimini tizimlashtirish uchun shart sharoit yaratibgina qolmay, balki o'rganilayotgan algebraik material bilan samarali bog'lanishni ham ta'minlaydi. Bu trigonometrik tenglamalarni o'rganish bilan bog'liq bo'lgan materialning xususiyatlaridan biridir.

ISSN 2181-3187

Bu xususiyatlarni o'qituvchi maktab o'quvchilarini trigonometrik tenglamalarni yechishga o'rgatish metodikasini ishlab chiqishda hisobga olishi kerak.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Avezov A.X. Matematikani o'qitishda interfaol metodlar: «Keys-stadi» metodi // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 462-470 b.
2. Avezov A.X. Funksiyaning to'la o'zgarishini hisoblashga doir misollar yechish yo'llari haqida // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 50-61 b.
3. Avezov A.X. «Kompleks sonlar» mavzusini o'qitishda «Bumerang» texnologiyasi // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 430-440 b.
4. Avezov A.X. Funksiya hosilasi mavzusini o'qitishda «Kichik guruhlarda ishlash» metodi // Science and Education, scientific journal, 2:12 (2021), 441-450 b.
5. Avezov A.X. Ta'limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish samaradorligini oshirish // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), c. 789-797.
6. Avezov A.X. Oliy matematika fanini o'qitishda tabaqalash texnologiyasidan oydalanish imkoniyatlari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), c. 778-788.
7. Avezov A.X. Умумтаълим мактаблардаги математика дарсларида ахборот технологияларини ривожлантириш тамойиллари // Science and Education, scientific journal 2:11 (2021), 749-758 б.
8. Avezov A.X. Matematika o'qitishning tatbiqiy metodlari // Pedagogik mahorat, 2021, Maxsus son. 52-57 b.
9. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.65-76.
10. Avezov A.X., Rakhmatova N. Eyler integrallarining tatbiqlari // Scientific progress, 2:1 (2021),1397-1406 b