

TASODIFIY HODISALAR

Rejabova Gulnoza Yuldashevna

Izboskan tuman 2-son kasb-hunar maktabi

Matematika fani o'qituvchisi

ANNOTATSIYA: Tasodifiy hodisa tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchasi bo'lib, u orqali boshqa ko'pgina ehtimoliy tushunchalarga ta'riflar beriladi. Bu tushunchaning shaklanish tarixiy jarayonini, uning qanday ehtiyojlarga ko'ra rivojlanib, bugungi holatga kelganligini bilish, o'quvchilarning ehtimollar nazariyasi elementlarini o'rganishga bo'lgan qiziqishini oshiradi. Maqolada tasodifiylik tushunchasi shakllanish tarixidan qiziqarli ma'lumotlar keltirilib, ehtimollar nazariyasi elementlari bo'limining birinchi darsini o'tishga doir ayrim tavsiyalar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Tajriba, o'yin soqqasi, tasodifiy hodisa.

ABSTRACT: The concept of a random event is a key concept in the theory of probability, which defines many other probabilistic concepts. Knowledge of the historical process of the formation of this concept, the needs of its development and the current state increases the interest of students in the study of the elements of the theory of probability. The article provides interesting information on the history of the formation of the concept of randomness, as well as some recommendations for the first lesson on the elements of probability theory.

Key words: Experience, dice, random event.

KIRISH: Tasodifiy hodisa tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchasi bo'lib, u orqali boshqa ko'pgina ehtimoliy tushunchalarga ta'riflar beriladi. Bu tushunchaning shaklanish tarixiy jarayonini, uning qanday ehtiyojlarga ko'ra rivojlanib, bugungi holatga kelganligini bilish, o'quvchilarning ehtimollar nazariyasi elementlarini o'rganishga bo'lgan qiziqishini oshiradi.

1-ta'rif. *Hodisa deb, ma'lum bir shartlar bajarilishi natijasida ro'y bergan voqeaga aytiladi.*

2-ta'rif. *Hodisa bilan bog'liq bo'lib, uning paydo bo'lishiga sababchi bo'lgan barcha kompleks shartlarga sinash yoki tajriba deyiladi.*

Masalan: 1) bir turdagi asboblarning sifatini tekshirish sinash hisoblanadi. Tekshirish natijasida kuzatilgan yaroqsiz yoki yaroqli asboblarning hodisani tashkil qiladi; 2) lotoreyada yutuq chiqishini tekshirish-sinash, yutuq chiqishi yoki chiqmasligi esa, hodisa bo'ladi; 3) tangani tashlash-sinash, yozuvli tomon yoki gerb tomoni tushishi hodisadir.

Hodisani sinash natijasi deb qaraymiz.

1-misol. Mergan to'rtta sohaga ajratilgan nishonga qarata o'q uzadi. O'q uzilishi-bu sinash. Nishonning tayin sohasiga o'q tegishi hodisa.

2-misol. Yashikda rangli sharlar bor. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olinadi. Yashikdan shar olinishi sinash hisoblanadi. Rangli shar chiqishi esa, hodisa.

Hodisalar 3 turga bo'linadi: 1) muqarrar (ishonchli) hodisalar; 2) mumkin bo'lmagan (ishonchsiz) hodisalar; 3) tasodifiy hodisalar.

3-ta'rif. *Har bir sinashda albatta ro'y beradigan hodisalar muqarrar hodisalar deyiladi.*

Masalan: 1) bahor faslidan keyin yoz fasli kelishi; 2) yuqoriga otilgan tosh yerga qaytib tushishi; 3) normal sharoitda temperaturasi 50^0 bo'lgan suvning muz holatda bo'lishidan iborat hodisalar muqarrar hodisalardir.

4-ta'rif. *Sinash natijasida albatta ro'y bermaydigan hodisalar mumkin bo'lmagan hodisalar deyiladi.*

Masalan: 1) o'yin soqqasi tashlanganda 10 dan ortiq ochko tushishi; 2) quyosh galaktikasida harakatlanayotgan jism tezligining $4 \cdot 10^9$ ga teng bo'lishi; 3) $x^2 + 4 = 0$ tenglamaning haqiqiy yechimga ega bo'lishidan iborat hodisalar mumkin bo'lmagan hodisalardir.

5-ta'rif. *Sinash natijasida albatta ro'y beradigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi.*

Masalan: 1) tanga tashlaganda gerbli tomoni tushishi; 2) o'yin soqqasi tashlanganda juft ochko tushishi; 3) yangi tu'g'ilgan chaqaloqning o'g'il bola bo'lishidan iborat hodisalar tasodifiy hodisalardir.

Odatda muqarrar hodisalar Ω harfi bilan, mumkin bo'lmagan hodisalar esa \emptyset bilan belgilanadi.

Tajribaning har qanday natijasi elementar hodisa deb ataladi va ω bilan belgilanadi. Elementar hodisalar to'plami Ω bilan belgilanadi.

1-misol. Tangani bir marta tashlashdan iborat tajriba natijasi ikkita elementar hodisadan: ω_1 -tanganing gerbli tomoni tushishi hodisasi (G) va ω_2 -tanganing raqamli tomoni tushishi hodisasi (R) iborat bo'ladi. Bu holda elementar hodisalar to'plami $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{G, R\}$ bo'ladi.

Shuningdek tangani ikki marta tashlashdan iborat tajribani qaraganimizda natija quyidagicha bo'ladi: $GG; RG; GR, RR$ -elementar hodisalar bo'lib ularning to'plami $\Omega = \{GG; GR; RG; RR\}$ bo'ladi.

Elementar hodisalarga ajratish mumkin bo'lgan hodisalar murakkab hodisalar deb ataladi.

Ehtimollar nazariyasi yetarlicha, ko'p sondagi bir jinsli tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash bilan shug'ullanadi.

Demak, ehtimollar nazariyasining predmeti ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini o'rganishdir.

2. Tasodifiy hodisalar ustida amallar.

Ta'rif. Agar tajriba natijasida A hodisa ro'y berganida B hodisa albatta ro'y bersa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deb ataladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Masalan, tajriba o'yin soqqasini tashlashdan iborat bo'lsin. A hodisa "4" ochko tushishidan iborat hodisa, B esa "juft" ochko tushishidan iborat hodisa bo'lsin. U holda ravshanki $A \subset B$.

Ta'rif. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa va o'z navbatida B hodisa A hodisani ergashtirsa, u holda A va B ekvivalent yoki teng kuchli hodisalar deb ataladi va $A = B$ kabi yoziladi.

Masalan, tajriba o'yin soqqasini uch marta tashlashdan iborat bo'lib, A hodisa "har xil toq ochkolar" tushishidan iborat, B hodisa esa tushgan ochkolar ko'paytmasi "15" ga tengligidan iborat bo'lsa, u holda $A = B$ bo'ladi.

Ta'rif. Tajriba natijasida A va B hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat hodisa ularning yig'indisi deb ataladi va $A + B$ bilan belgilanadi.

Masalan, tajriba o'yin soqqasini tashlashdan iborat bo'lib, A hodisa "toq ochkolar" tushishidan iborat, B hodisa esa "2 yoki 4 ochkolari" tushishidan iborat bo'lsa, u holda A va B hodisalarning yig'indisi "5 dan ortiq bo'lmagan ochko" tushishidan iborat hodisa bo'ladi.

Ta'rif. Tajriba natijasida A va B hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat hodisa ularning ko'paytmasi deb ataladi va $A \cdot B$ kabi belgilanadi.

Masalan, tajriba o'yin soqqasini tashlashdan iborat bo'lib, A hodisa "toq ochkolar" tushishidan iborat, B hodisa esa "3 yoki 4 ochkolari" tushishidan iborat bo'lsa, u holda A va B hodisalarning ko'paytmasi "3 ochko" tushishidan iborat hodisa bo'ladi.

Ta'rif. Agar A va B hodisalar bir paytda ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisalar, ya'ni $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi. Aks holda ular birgalikda bo'lgan hodisalar deyiladi.

Boshqacha aytganda tajribada birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisalarga birgalikda bo'lmagan hodisalar deb atalar ekan.

Masalan, tanga tashlash natijasida bir vaqtda gerbli va raqamli tomonlar tushish hodisalari birgalikda bo'lmagan hodisalaridir.

Ta'rif. Agar A va B hodisalarning yig'indisi muqarrar hodisa, ko'paytmasi esa mumkin bo'lmagan hodisa, ya'ni $A + B = \Omega$, $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar o'zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi. Odatda A hodisaga qarama-qarshi hodisa \bar{A} kabi belgilanadi. Demak, $A + \bar{A} = \Omega$, $\bar{A} \cdot A = \emptyset$.

Masalan, tangani bir marta tashlashdan iborat tajribada gerbli va raqamli tomonlari tushishidan iborat hodisalar qarama-qarshi hodisalaridir. Shunga o'xshash

detalning standartligini tekshirishdan iborat tajribada detalning standart chiqish hodisasi va standart chiqish hodisasi qarama-qarshi hodisalardir.

Ta'rif. Tajriba natijasida A hodisaning ro'y berishidan, B hodisaning esa ro'y bermasligidan iborat hodisa A va B hodisalar ayirmasi deb ataladi va $A-B$ kabi belgilanadi.

Masalan, tajriba to'liq qartalar dastasidan bitta qartani tortishdan iborat bo'lib, A hodisa "g'ishtin" qartaning B hodisa esa istalgan "dama" qartaning chiqishdan iborat bo'lganda $A-B$ hodisaning ro'y berishi chiqqan qarta "dama"dan farqli "g'ishtin" qarta bo'lishini anglatadi.

Eslatma. Xuddi shunday chekli sondagi A_1, A_2, \dots, A_n hodisalarning yig'indisi va ko'paytmasi ta'riflari ham 1.8 va 1.9- ta'riflarga o'xshash ta'riflanadi.

Ta'rif. Agar $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, ya'ni tajribada A_1, A_2, \dots, A_n hodisalardan hech bo'lmaganda biri ro'y bersa, bu hodisalar hodisalarning to'la guruhini tashkil qiladi deyiladi.

Agar $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$) bo'lsa A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la guruhini tashkil etadi deyiladi.

Agar bir nechta A_1, A_2, \dots, A_n hodisalardan istalgan birini tajriba natijasida ro'y berishi boshqalariga qaraganda imkoniyatliroq deyishga asos bo'lmasa, bunday hodisalar teng imkoniyatli hodisalar deyiladi.

Masalan tanga tashlanganda gerbli tomon va raqamli tomon tushishlaridan iborat hodisalar teng imkoniyatlidir.

2.2-misol. Uchta talaba bir biri bilan bog'lanmagan holda bitta masalani ishlayaptilar. Faraz qilamiz, A_1 hodisa – birinchi talaba masalani yechdi, A_2 – ikkinchi talaba masalani yechdi, A_3 – uchinchi talaba masalani yechdi. A_i ($i = 1, 2, 3$) hodisalar orqali, quyidagi hodisalarni ifodalang:

- 1) A - barcha talabalar masalani yechdi;
- 2) B - masalani faqat birinchi talaba yechdi;
- 3) C - hech bo'lmaganda bitta talaba masalani yechdi;
- 4) D - masalani faqat bitta talaba yechdi.

Yechish. 1) A hodisaning ro'y berishi, bu A_1, A_2, A_3 hodisalarni bir vaqtda ro'y berganini bildiradi, ya'ni hodisalarning ko'paytmasini ifodalaydi: $A = A_1 A_2 A_3$.

2) Bu holda A_1 hodisa ro'y berdi, A_2 va A_3 hodisalar ro'y bermadi, ya'ni \bar{A}_2 va \bar{A}_3 hodisalar ro'y berdi. Shunday qilib, $B = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.

3) C hodisa shuni bildiradiki, yo A_1 hodisa, yo A_2 hodisa, yo A_3 hodisa, yoki ulardan ixtiyoriy ikkitasi, yoki uchala hodisa birgalikda ro'y bergan, ya'ni ularning yig'indisi ifodalaydi $C = A_1 + A_2 + A_3$.

4) Masalani faqat birinchi talaba yechgan ($A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$), yoki faqat ikkinchi talaba ($\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$), yoki faqat uchinchi talaba ($\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$), ya'ni bu hodisalarning yig'indisini tashkil etadi

$$D = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

2.3-misol. $A + A \cdot B$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$A + AB = A \cdot \Omega + AB = A \cdot (\Omega + B) = A(B + \Omega) = A\Omega = A.$$

Shunday qilib $A + AB = A$. Isbotlashda biz quyidagi xossalardan foydalandik:

$$A + \Omega = \Omega, A \cdot \Omega = A,$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$A + B = B + A, AB = BA,$$

bunda Ω elementar hodisalar fazosi.

2.4-misol. Faraz qilamiz A, B va C tasodifiy hodisalar bo'lsin. Quyidagi tenglikni isbotlang:

$$A(B - C) = AB - AC.$$

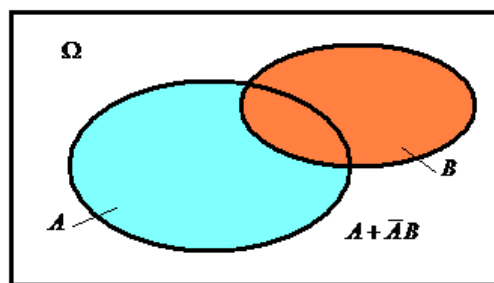
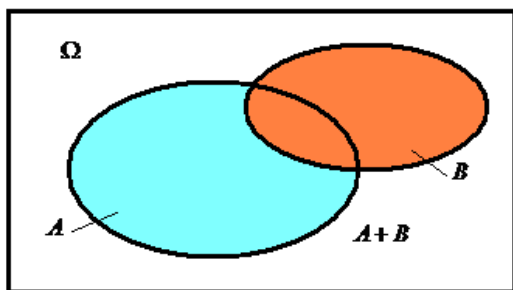
Isboti. Tajribaning ixtiyoriy natijasi elementar hodisa. Faraz qilaylik, $\omega \in A(B - C)$ bo'lsin, unda $\omega \in A$ va $\omega \in B - C$ bo'ladi, ya'ni $\omega \in A, \omega \in B$, lekin $\omega \notin C$. Shunday qilib $\omega \in AB$ va $\omega \notin AC$. Bundan $\omega \in AB - AC$, ya'ni $A(B - C)$ hodisa $AB - AC$ hodisani ergashtiradi, ya'ni $A(B - C) \subset AB - AC$. Shunga o'xshash $AB - AC \subset A(B - C)$ munosabat isbotlanadi. Bulardan $A(B - C) = AB - AC$ kelib chiqadi.

2.5-misol. $A + B = A + \bar{A}B$ isbotlang, bunda A va B tasodifiy hodisalar. Hodisalarning geometrik talqinini keltiring.

Yechish. Hodisalar ustida amallarning xossalariga asosan

$$A + B = A\Omega + B\Omega = A\Omega + B(A + \bar{A}) = A\Omega + AB + B\bar{A} =$$

$$= A(\Omega + B) + \bar{A}B = A\Omega + \bar{A}B = A + \bar{A}B.$$



Ω fazoni to'g'ri to'rtburchak orqali chizib, elementar hodisalarni (natijalarini) – shu to'g'ri to'rtburchakning nuqtalari deb, hodisani – uning qism to'plami (to'plamlarni bunday tasvirlash Eyler-Venn diagrammasi deyiladi), quyidagi rasmni hosil qilamiz: Ehtimolning klassik va statistik ta'riflari.

Faraz qilaylik, elementar hodisalar fazosi Ω cheklita $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lib, ular teng imkoniyatli bo'lsin.

Ta'rif. *Kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar sonining ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soniga nisbati A hodisaning ehtimoli deyiladi va $P(A) = \frac{m}{n}$ ko'rinishda belgilanadi.*

Bu yerda m – A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni, n – barcha mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni.

Ehtimolning tarifidan quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1. *Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng.*

Haqiqatan, agar hodisa muqarrar bo'lsa, u holda sinashning har bir elementar natijasi bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi. Bu holda $m = n$, va demak,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli 0 ga teng.*

Agar hodisa ro'y bermaydigan bo'lsa, u holda sinashlarning hech bir natijasi bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'dirmaydi. Bu holda $m = 0$, va demak,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Tasodifiy hodisaning ehtimoli nol va bir orasida bo'ladi.*

Tasodifiy hodisaning ro'y berishiga barcha elementar hodisalarning bir qismigina qulaylik tug'diradi. Bu yerdan $0 < m < n$ ni olamiz. Demak, $\frac{0}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n}$ bu esa

$$P(A) = \frac{m}{n} \in (0, 1) \text{ ni keltirib chiqaradi.}$$

Shunday qilib, istalgan hodisaning ehtimoli nol va bir orasida bo'ladi.

Ta'rif. A hodisa ustida n ta bog'liqsiz tajriba o'tkazilgan bo'lsin. A hodisaning nisbiy chastotasi deb, hodisa ro'y berishlar sonining, o'tkazilgan barcha tajribalar soniga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$W(A) = \frac{\mu}{n}.$$

Bu yerda n o'tkazilgan barcha tajribalar soni, o'tkazilgan n ta tajribaning μ tasida A hodisa ro'y bergan.

2.6-misol. Qutida 7 ta oq, 3 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A olingan shar oq chiqish hodisasi bo'lsin. Bu sinov 10 ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo'lib, ularning 7 tasi A hodisaga qulaylik tug'diruvchidir. Demak, $P(A) = \frac{7}{10} = 0,7$.

2.7-misol. Telefonda nomer terayotgan abonent oxirgi ikki raqamni esdan chiqarib qo'yadi va faqat bu raqamlar har xil ekanligini eslab qolgan holda ularni tavakkaliga teradi. Abonentning kerakli raqamlarni terilganligi ehtimolini toping.

Yechish. B – kerakli ikkita raqam terilganlik hodisasi bo'lsin. Elementar hodisalar soni - o'nta raqamdan ikkitadan nechta o'rinlashtirishlar tuzish mumkin bo'lsa, shuncha, ya'ni $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ ta turli raqamlarni terish mumkin.

$$\text{Demak, } P(B) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

2.8-misol. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A bilan qurilma ishga tushirilganda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish hodisasini belgilaylik. Mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soni C_5^2 ga teng. Bularning ichidan C_3^2 tasi eskirmagan elementlar ulangan bo'lish hodisasi A uchun qulaylik tug'diradi. Shuning uchun $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0.3$.

2.9-misol. Texnik nazorat bo'limi tasodifan ajratib olingan 100 ta kitobdan iborat partiyada 5 ta nuqsonli kitob topdi. Nuqsonli kitoblar chiqish nisbiy chastotasini toping.

Yechish. A bilan olingan kitob nuqsonli chiqish hodisasini belgilaylik. 100 kitob tekshirildi. Bundan o'tkazilgan tajribalar soni $n=100$ ekanligini olamiz. Tekshirish natijasida 5 ta kitob nuqsonli chiqdi, ya'ni 5 ($\mu=5$) marta A hodisa ro'y berdi. Demak, nuqsonli kitob chiqish hodisasining nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{5}{100} = 0,05$.

2.10-misol. Nishonga 20 marta o'q uzilgan shundan 18 ta o'q nishonga tekkani qayd qilingan. Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

Yechish. Demak, jami o'tkazilgan tajribalar soni $n=20$, nishonga tegishlar soni 18 (ya'ni shundan 18 tasida A hodisa ro'y berdi). Shunday qilib, $W(A) = \frac{18}{20} = 0,9$.

2.11-misol. Yashikda 4 ta oq, 10 ta qora va 6 ta ko'k shar bor. Yashikdan tasodifan bitta shar olinadi. Shu sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Bu yerda elementar hodisalar yashikdan ixtiyoriy shar olinishidan iborat. Barcha bunday natijalar soni yashikdagi sharlar soniga teng, ya'ni $n=30$. Oq shar chiqishi hodisasini A bilan belgilasak, unga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni yashikdagi oq sharlar soniga tengligi ravshan, ya'ni $m=4$. Demak, ta'rifga asosan

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{30} = \frac{1}{5}.$$

2.12-misol. O'yin kubi tashlanganda juft raqam yozilgan tomoni tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. O'yin kubining 6 ta tomoni bo'lib, har bir tomoniga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan biri yozilgan. Demak, barcha ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $n = 6$. Juft raqam yozilgan tomoni tushishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar esa 2, 4, 6 ya'ni ularning soni $k = 3$. Agar o'yin kubi tashlanganda juft tomoni tushish hodisasini A bilan belgilasak, u holda uning ehtimoli klassik ta'rifga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. Gnedenko B.V., Kurs teorii veroyatnostey, 5 izd., M., 1969;
2. Proxorov Yu.V., Rozanov Yu.A., Teoriya veroyatnostey, 2 izd., M., 1973;
3. Feller V., Vvedeniye v teoriyu veroyatnostey i yeyo prilozheniye. Per. s ang . 2 izd., M., 1967;
4. Sarmmsakov T.A., Osnovi teorii protsessov Markova, M.,. 1951;
5. Sirajiddinov S.X., Predelnme teoremn dlya. odnorodnix sepey Markova., T., 1955;
6. Sirajiddinov S.X., Azlarov T.A., Zuparov T.M., Additivnme zadachi s rastuvdim chislom slagayemmx, T., 1975. Tursun Azlarov.