ISSN 2181-3187

КВАДРАТИК ФОРМА ВА ИНРЕЦИЯ ҚОНУНИ

Мусурманова Малоҳат Арслонбек қизи *- ГулДПИ ўқитувчи*
Досанов Муртозақул *- ГулДУ ўқитувчи*

Аннотация: Ушбу мақолада квадратик формада инерция қонуни тушунчаси ва унинг назарий асослари мазмун жиҳатдан кенг ёритилган.

Калит сўзлар: Инерция қонуни, квадратик форма, вектор, детерминант, фазо, прапорционал, чизиқли боғлиқ, чизиқли эркли.

Квадратик формани

$$A(x,x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \cdots + \lambda_n\xi_n^2 \quad (1)$$

кўринишга келтирувчи базис векторларни уларга прапорционал векторлар билан алмаштириш орқали нолдан фарқли λ_i коэффициентларни 1 ёки -1 га тенг қилиб олиш мумкин. Демак, квадратик форманинг каноник кўринишини мос тартибда 0,1 ва -1 га тенг бўлган коефициентлар сони билан характерлаш мумкин.

Табий-ки, базисни турлича танлаб олиш мумкинлиги учун, 0,1 ва -1 га тенг бўлган коэффициентлар сон базисни танлаб олишга боғлиқми ёки йўқми деган савол туғилади. Масалан, $A(x,x)$ квадратик форма бирор $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда $A = (a_{i,j})$ матрицага эга бўлиб, матрицанинг $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ бош минорлари нолдан фарқли бўлса, квадратик форманинг каноник кўринишдаги барча λ_i коэффициентлар нолдан фарқли ва манфий коэффициентлар сони $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ детерминантлар қаторидаги ишора алмашишлар сонига тенг бўлади.

Аммо бошқа бир $f_1, f_2, \dots, f_n$ бошланғич базис олиб, бу базисга мос келувчи матрицани $A' = (a'_{i,j})$ орқали белгилаб, $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ детерминантларни топсак, ҳамда квадратик формани каноник кўринишга келтирсак, нима учун бу ҳолда ҳам ишора алмашишлар сони юқоридаги билан бир хил бўлиши тушнарли эмас.

Биз ушбу мақолада квадратик форманинг инерция қонуни деб аталувчи теоремани исбот қиламиз.

Теорема. Агар квадратик форма икки хил усул билан каноник кўринишга келтирилган бўлса, у ҳолда бу каноник кўринишларда мусбат, манфий ва нолга тенг коэффицентларнинг сони иккала ҳолатда ҳам бир хил бўлади.

Олдин қуйидаги леммани исбот қиламиз.

Лемма. n ўлчамли В фазода мос тартибда k ва l ўлчамли V_1 ва V_2 қисм фазолар берилган бўлиб, $k + l > n$ шарт бажарилсин. У ҳолда, бу қисм фазоларнинг иккаласига ҳам тегишли бўлган нолдан фарқли x вектор мавжуд.

Исбот. Берилган V_1 ва V_2 қисм фазоларда мос равишда $e_1, e_2, \dots, e_k$ ва $f_1, f_2, \dots, f_l$ базислар олайлик. $k + l > n$ эканлиги учун $e_1, e_2, \dots, e_k, f_1, f_2, \dots, f_l$

ISSN 2181-3187

векторлар чизиқли боғлиқ бўлади. Демак, камида биттаси нолдан фарқли бўлган $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ сонлар топилиб,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_l f_l = 0$$

яъни

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2 - \dots - \mu_l f_l$$

Агар

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k = -\mu_1 f_1 - \mu_2 f_2 - \dots - \mu_l f_l$$

деб фараз қилсак, x вектор бир томондан $e_1, e_2, \dots, e_k$ векторларнинг чизиқли комбинацияси, иккинчи томондан еса $f_1, f_2, \dots, f_l$ векторларнинг чизиқли комбинацияси сифатида тасвирланишини кўришимиз мумкин. Демак, x вектор V_1 ва V_2 қисм фазоларнинг иккаласига ҳам тегишли бўлади.

Энди ушбу x векторни нолдан фарқли эканлигини кўрсатамиз. Агар $x = 0$ бўлса,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k = 0, \;\; \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_l f_l = 0.$$

$e_1, e_2, \dots, e_k$ ва $f_1, f_2, \dots, f_l$ векторлар системалари мос равишда V_1 ва V_2 қисм фазоларнинг базислари бўлганлиги учун, бу векторлар системалари чизиқли эркли. Бундан эса, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_l = 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу еса $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ сонларнинг камида биттаси нолдан фарқли еканлигига зиддир. Демак, $x \neq 0$

Энди теореманинг исботига ўтамиз. Айтайлик, $A(x,x)$ квадратик форма $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда

$$A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \xi_{p+2}^2 - \dots - \xi_{p+q}^2 \quad (2)$$

кўринишга, $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда эса

$$A(x,x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{p'}^2 - \eta_{p'+1}^2 - \eta_{p'+2}^2 - \dots - \eta_{p'+q'}^2 \quad (3)$$

кўринишга эга бўлсин, бу ерда $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ва $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ лар мос равишда x векторнинг $e_1, e_2, \dots, e_n$ ва $f_1, f_2, \dots, f_n$ базислардаги координаталари.

$p = p'$ ва $q = q'$ эканлигини исбот қилишимиз керак. Фараз қилайлик, $p > p'$ бўлсин.

$e_1, e_2, \dots, e_p$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган V_1 ва $f_{p'+1}, f_{p'+2}, \dots, f_n$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган V_2 қисм фазоларни қараймиз. Маълум-ки, $\mathrm{Dim}(V_1) = p, \mathrm{Dim}(V_2) = n - p'$ бўлиб, $n - p' + p > n$ эканлиги учун леммага асосан V_1 ва V_2 қисм фазоларнинг кесишмасида нолдан фарқли $x \in V_1 \cap V_2$ вектор мавжуд. У ҳолда

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_p e_p$$

ва

$$x = \eta_{p'+1} f_{p'+1} + \eta_{p'+2} f_{p'+2} + \dots + \eta_n f_n$$

ISSN 2181-3187

бўлади, яъни x вектор $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, 0, \dots, 0)$ координаталарга, $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда эса $(0, \dots, 0, \eta_{p'+1}, \eta_{p'+2}, \dots, \eta_n)$ координаталарга эга бўлади.

Бу координаталарни (2) ва (3) тенгликларга қўйиб, бир томондан
$A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_p^2 > 0,$
иккинчи томондан эса

$$A(x,x) = -\eta_{p'+1}^2 - \eta_{p'+2}^2 - \cdots - \eta_{p'+q'}^2 < 0$$

муносабат ҳосил қиламиз. Бу эса $p > p'$ деб олинган фаразга зид, яъни $p \leq p'$ бўлади.

Энди фараз қилайлик $p < p'$ бўлсин. $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган V_1 ва $f_1, f_2, \dots, f_{p'}$ векторлрнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган V_2 қисм фазоларни қараймиз. Маълумки $\mathrm{Dim}(V_1) = n - p, \mathrm{Dim}(V_2) = p'$ бўлиб $p' + n - p > n$ эканлиги учун леммага асосан V_1 ва V_2 қисм фазоларнинг кесишмасида нолдан фарқли $x \in V_1 \cap V_2$ вектор мавжуд. У ҳолда

$$x = \xi_{p+1}e_{p+1} + \xi_{p+2}e_{p+2} + \cdots + \xi_n e_n$$

ва

$$x = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \cdots + \eta_{p'} f_{p'}$$

бўлади, яъни x вектор $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда $(0, \dots, 0, \xi_{p'+1}, \xi_{p'+2}, \dots, \xi_n)$ координаталарга, $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда эса, $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p, 0, \dots, 0)$ координаталарга эга бўлади.

Бу координаталарни (2) ва (3) тенгликларга қўйиб, бир томондан
$A(x,x) = -\xi_{p+1}^2 - \xi_{p+2}^2 - \cdots - \xi_{p+q}^2 < 0,$
иккинчи томондан эса

$$A(x,x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_{p'}^2 < 0$$

муносабат ҳосил қиламиз. Бу эса $p < p'$ деб олинган фаразга зид, яъни $p \geq p'$

демак $p \leq p'$ ва $p \geq p'$ лардан $p = p'$ ни ҳосил қиламиз.

Унда $A(x,x)$ квадратик форма $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда

$$A(x,x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_p^2 - \xi_{p+1}^2 - \xi_{p+2}^2 - \cdots - \xi_{p+q}^2$$

кўринишга, $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда эса

$$A(x,x) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_{p'}^2 - \eta_{p'+1}^2 - \eta_{p'+2}^2 - \cdots - \eta_{p'+q'}^2$$

кўринишга эга бўлади.

Энди юқорида келтирилган мулоҳазаларни $-A(x,x)$ квадратик формага тадбиқ қилиб $-A(x,x)$ квадратик форма $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисда

$$-A(x,x) = -\xi_1^2 - \xi_2^2 - \cdots - \xi_p^2 + \xi_{p+1}^2 + \xi_{p+2}^2 + \cdots + \xi_{p+q}^2$$

кўринишга $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда эса,

ISSN 2181-3187

$$-A(x,x) = -\eta_1^2 - \eta_2^2 - \cdots - \eta_{p'}^2 + \eta_{p'+1}^2 + \eta_{p'+2}^2 + \cdots + \eta_{p'+q'}^2$$

кўринишга эга бўламиз $e_1, e_2, \dots, e_n$ да мусбат қийматлар сони q га $f_1, f_2, \dots, f_n$ базисда эса q' та бўлади, яъни $q = q'$ экан теорема исботланди.

ФОЙДАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, А.Х.Худойбердиев, Ф.Ҳ.Ҳайдаров ”АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРЯСИ” Тошкент 2019 йил 319 бет.
2. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., Algeba and Number theory. 2010. – 523 p
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. 2000. – 368 с.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва. 1979. –559 с.