TATBIQIY AHAMIYATLI EKSTREMAL MASALARNI YECHISH METODLARI

Haydarova Shohista Muydinovna
QDPI Akademik litseyi yetakchi o'qituvchisi
Xasanova Xurshida Erkinovna
QDPI Akademik litseyi katta o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqola tatbiqiy ahamiyatli ekstremal masalalarni yechish metodlariga bag'ishlanadi. Bu maqolada asosan to'rtta masala qo'yiladi va har bir masalani yechishning bir nechta usullari ko'rsatiladi. Maqolada ko'rilgan barcha masalalar yangi masalalardir. Bu maqola maktab o'quvchi va o'qituvchilari qo'llanma sifatida xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: funkiya, hosila, differensial, tengsizlik, katta qiymat, eng kichik qiymat.

Kirish. Ma'lumki, u yoki bu matematik metod o'z tabiatiga ko'ra real voqeliklarning bevosita o'ziga emas, balki uning ma'lum qonuniyatlar asosida tuzilgan matematik modeliga qo'llaniladi. Matematik model esa voqelikning barcha o'zgarishlarini o'zida mujassamlashtirgan u yoki bu ko'rinishdagi funksional munosabatdir.

Shuning uchun tadbiqiy ahamiyatli ekstremal masalalarni yechish tuzilgan asosiy funksiyaning ma'lum bir shartlardagi optimal qiymatlarini topishdan iborat.

Maktab matematika kursida tadbiqiy ahamiyatli ekstremal masalalar sistemasini tuzishda, bizningcha quyidagi talablarni e'tiborga olish muhimdir.

1.Tuzilgan (tanlanayotgan) masalalar hozirgi zamon ishlab chiqarishining axborotlariga asoslangan bo'lishi kerak.

2.Masalalar qandaydir matematik muammo asosiga qurilmay, balki bevosita ishlab chiqarish natijalariga mos kelishi kerak.

3.Masalaning yechimi maktab programmasida tashqariga chiqmasligi zarur.

Bundan buyon yozuvda ekstremal masala deganda tatbiqiy mohiyatli ekstremal masalalarni tushunishga shartlashamiz.

Quyida biz ekstremal masalalarni yechishning ba'zi asosiy metodlariga to'xtalib o'tamiz.

Buyuk matematik Yakob Shteyner (1796-1863) o'z vaqtida ekstremal masalalarni yechishning ikki metodi haqida fikr yuritgan edi.

I. Differensial hisob yordamida hisoblash metodi.

ISSN 2181-3187

II. Sintetik metod (xususiy usullar yordamida).

Har ikkala metodga alohida to‘htalib o‘tamiz.

I. Differensial hisob yordamida hisoblash metodi.

Masalaning qo‘yilishi. Ko‘pdan-ko‘p amaliy masalalar funksiyaning biror oraliqdagi eng katta yoki eng kichik qiymatini topishga keltiriladi. Bunday masalalarni yechish usullari darslikda ko‘rsatilgan bo‘lib, funksiyaning yopiq oraliqda eng katta va eng kichik qiymatini topishga asoslangandir.

Biroq ekstremal masalalarda tekshirilayotgan funksiya ko‘pincha ochiq, hatto cheksiz oraliqda bo‘lishi mumkin.

Shuning uchun funksiyalarni tekshirishning yana bir qoidasi bilan to‘ldirish maqsadga muvofiqdir. Quyida teorema sifatida keltirilgan qoida o‘quvchilarning o‘zlashtirishi uchun aytarli qiyinchilik tug‘dirmaydi.

1-teorema. Aytaylik F funksiya J oraliqda differensiyalanuvchi bo‘lib yagona x_0 kritik nuqtaga ega bo‘lsin. U holda F' hosila $x < x_0$ da manfiy, $x > x_0$ da musbat bo‘lsa, $x = x_0$ nuqtada F funksiya eng kichik qiymatga erishadi.

Bu teoremaning isbotini o‘quvchining o‘ziga havola etamiz. Shuni e’tiborga olish kerakki, bu teorema ihtiyoriy oraliq uchun o‘rinlidirBa’zi hollarda masalan, masala shartida xarflar ishtirok etganda kritik nuqtadan o‘tishdagi hosila ishorasini aniqlash bir muncha qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi. Bunday hollarda ikkinchi tartibli hosiladan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

2. Sintetik metod. Ekstremal masalalarni xususiy metodlardan foydalanib yechish.

1. Kvadrat funksiya va ularning ekstremumlari.

Aytaylik $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ funksiya berilgan bo‘lib, bu funksiya R da aniqlangan va uzluksiz bo‘ladi. $f(x)$ ni hosila qoidasidan foydalanmay tekshiraylik.

2-teorema. $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiya $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ da ekstremum qiymatga erishadi. Agar $a < 0$ bo‘lsa, bu qiymat eng katta, $a > 0$ bo‘lsa, bu qiymat eng kichik bo‘ladi.

Isbot: Berilgan funksiyadan to‘la kvadrat ajratamiz:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\right) + c = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

ISSN 2181-3187

Endi esa yuqoridagi har ikkala holda ham teoremaning o‘rinli ekanligini isbotlaymiz.

A) $a<0$ bo‘lsa, birinchi qo‘shiluvchi $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ - manfiy bo‘lib, $x=-\frac{b}{2a}$ da eng katta qiymatga erishadi. Ikkinchi qo‘shiluvchi o‘zgarmas son bo‘lgani uchun bu holda kvadrat funksiya $c-\frac{b^2}{4a}$ ga teng va eng katta qiymatga erishadi.

B) $a>0$ bo‘lsa, birinchi qo‘shiluvchi $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ - musbat bo‘lib, $x=-\frac{b}{2a}$ da eng kichik qiymatga erishadi. Ikkinchi qo‘shiluvchi o‘zgarmas son bo‘lgani uchun kvadrat funksiya $x=-\frac{b}{2a}$ da $c-\frac{b^2}{4a}$ ga teng eng kichik qiymatga erishadi.

Bu teorema tekshirilayotgan masalaning matematik modeli kvadrat funksiya bo‘lgan hollarda, shubhasiz katta ahamiyatga ega bo‘ladi.

Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani ko‘raylik.

Masala. To‘g‘ri burchakli to‘rtburchak shaklidagi yer uchastkasi bir tomondan zavod devoriga yopishgan. Agar uchastka devorining umumiy uzunligi 200 metr bo‘lsa, uning yuzasi eng katta bo‘lishi uchun devorlarning o‘lchamlari qanday bo‘lishi kerak?

Yechish. Aytaylik, devorlardan birining uzunligi x bo‘lsin, u holda unga qo‘shni tomonning uzunligi $(200-2x)$ m. bo‘lib, uchastkaning yuzasi $S=x\cdot(200-2x)=-2x^2+200x$ bo‘ladi.

Shunday qilib, tekshirilayotgan masalaning matematik modeli $S=-2x^2+200x$ ko‘rinishdagi kvadrat funksiyani hosil qildik. Bu yerda $a=-2<0, b=200, c=0.$

U holda yuqoridagi teoremaning A) – holiga ko‘ra $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{200}{2\cdot(-2)}=50$ da yuza eng katta bo‘ladi. Ekstremumga tekshirish zarur bo‘lgan ba’zi masalalarni yechishda oldindan ma’lum bo‘lgan tengsizliklardan ham foydalaniladi. Navbatdagi metod sifatida ana shunday tengsizliklardan biri bilan tanishamiz.

2. Ekstremal masalalarni tengsizliklar yordamida yechish.

3-teorema. Aytalik, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ – nomanfiy sonlar bo‘lib, n natural son bo‘lsin. u holda

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1+x_2+\ldots\cdot x_n} \qquad (1)$$

tengsizlik o‘rinlidir, ya’ni berilgan sonlarning o‘rta arifmetigi, shu sonlarning o‘rta geometrik qiymatidan kichik emas. Bu yerda tenglik alomati faqat $x_1=x_2=\ldots=x_n$ bo‘lgandagina o‘rinlidir. Bu teorema matematik induksiya metodi yordamida isbotlanadi. Quyida biz ushbu teoremadan kelib chiqadigan ikkita muhim natijaga to‘htalamiz va ularning to‘liq isbotini keltiramiz.

ISSN 2181-3187

1-natija. Yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan n ta manfiy bo‘lmagan sonlarning ko‘paytmasi shu ko‘paytuvchilar o‘zaro teng bo‘lgandagina eng katta qiymatga erishadi.

Isbot. Aytaylik, n ta manfiy bo‘lmagan qo‘shiluvchilar (o‘zgaruvchilar)ning yig‘indisi S bo‘lsin. (1) ga ko‘ra $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{p}$ va $x_1+x_2+...+x_n \geq n\sqrt[n]{p}$.Bu yerda tenglik faqat $x_к\ (k=1,2,\cdots,n)$ ko‘paytuvchilarning har biri $\sqrt[n]{p}$ ga teng bo‘lgandagina o‘rinli, boshqa hollarda esa, yig‘indi $n\sqrt[n]{p}$ o‘zgarmasdan katta bo‘ladi.

Demak, $n\sqrt[n]{p}$ qiymat $x_1+x_2+x_3+.....+x_n$ yig‘indining eng kichik qiymati bo‘lib, bu qiymatga har bir qo‘shiluvchi $\sqrt[n]{p}$ ga teng bo‘lgandagina erishadi.

Keltirilgan teorema va uning natijalari maktab matematika kursida katta ahamiyatga ega bo‘lsada, doimo qo‘llanilavermaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YHATI

1. В.Қ.Қобулов. “Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси”. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1976.
2. F.B.Badalov, F.Shodmonov “Matematik modellar va muhandislik masalalarini sonli yechish usullari”. “Fan” nashriyoti.Toshkent 2000 yil.
3. Ю.Б.Боглаев. “Вычислителъная математика и программирование”.
4. Ҳикматов. “Экстремал масалалар”. Тошкент, 1989.
5. Набигин. “Экстремумы”. М.1966.
6. G‘.Nasriddinov, X.Shokirova. SH.Shoziyotov. “Stereometriya kursida ekstremal masalalar”.