ISSN 2181-3187

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ И ПАРАБОЛЫ

Ахмедова Феруза Гайрат кизи
Студент Джизакского филиала Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан
Научный руководитель: ***Шарипова Садокат Фазлиддиновна***
Старший преподаватель Джизакского филиала Национального университета Узбекистана

Аннотация: Оптические свойства эллипсов, гипербол и парабол являются важными понятиями в оптике, физике и технике. В этой работе исследуются основные свойства, уравнения и приложения этих кривых, подчеркивая их важность в изучении и оптимизации оптических систем.

Ключевые слова: эллипс, гипербола, парабола, оптика, свойства

Хорошо известно задача о нахождении на прямой l такой точки M, для которой сумма расстояние от двух заданных точек A, B лежащих по одну сторону прямой l - наименьшая. Искомой будет точка пересечения отрезка A_1 B с прямой l, где A_1- точка, симметричная A относительно прямой l (рис1). В самом дел

$$|AM| + |MB| = |A_1M| + |MB| = |A_1B|$$

Тогда как для любой другой точки M′ прямой l имеем $|AM'| + |M'B| = |A_1M'| + |M'B| > |AB|$

Иначе говоря $|AM'| + |M'B| > |AM| + |MB|$

Все это хорошо, может возразить нетерпеливый читатель, но задача эта просто и хорошо известна. И какое отношение все это имеет к эллипсу или параболе?Миниточку терпения! Взглянем еще раз на чертеж :

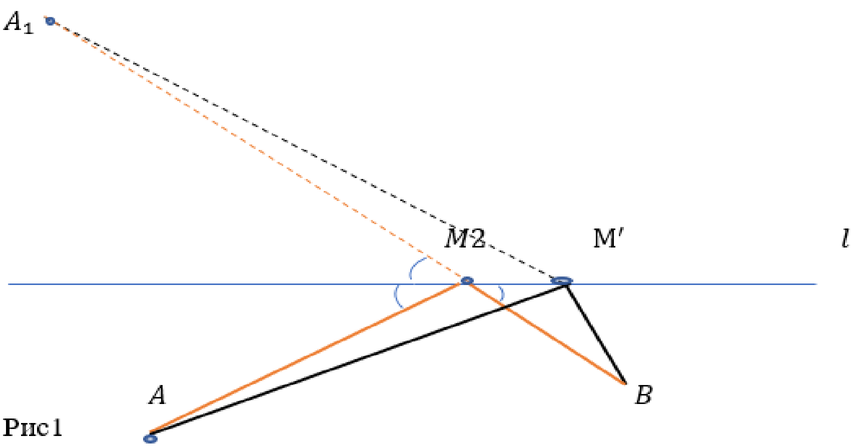


Рис1

ISSN 2181-3187

∠1≅∠3 ,а так как, кроме того, ∠2≅∠3, то ∠1≅∠2. Поэтому из решения рассмотренной задачи вытекает следующее утверждение:

Пусть A и B - две точки, лежащие по одну сторону прямой l, что отрезки AM и MB образуют с прямой l равные углы . Тогда для любой точки M прямой от M, справедливо неравенство(1)

Вот теперь мы дастоточно "вооружены" для рассмотрения оптического свойства эллипса. Возьмем на эллипса, имеющем фокусы A и B , произвольную точку M (рис2). Для любой точки N , принадлежатщей эллипсу, справедливо равенство

$|AN| + |BN| = |AM| + |BM|$,*) а для точки N, лежащей внутри эллипса, сумма

$|AN| + |BN|$ будет меньше, сумма$|AM| + |BM|$ Построим прямую l, проходящую через M и образующую равные углы с отрезками AM и BM . Если теперь M' - производительная точка прямой l, отличная от M , то как мы видели, сумма$|AM| + |BM`|$ будет больше $|AM| + |BM|$, и потому точка M' лежит в не эллипса.

Итак , прямая l имеет только одну общую точку с эллипсом , а именно , точку M; все же остальные точки Прямой l расположены вне эллипса. Такую прямую называют касательной к эллипсу. Таким образом, касательная к эллипсу проведенная в точке M, образует конгруэнтные углы с радиусами-векторами AM и BM(вектор). Это и есть оптическое свойства эллипса.

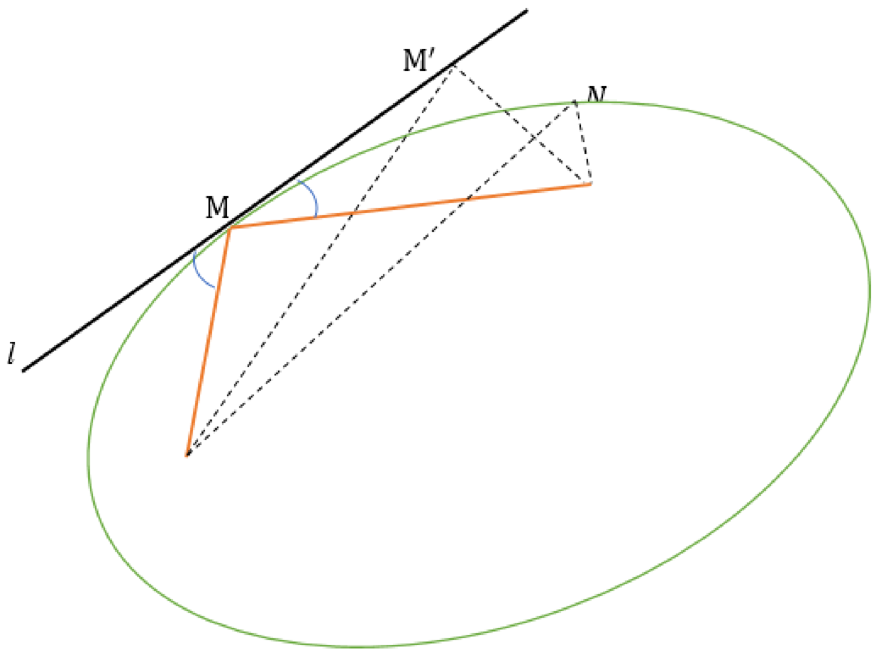


рис2

ISSN 2181-3187

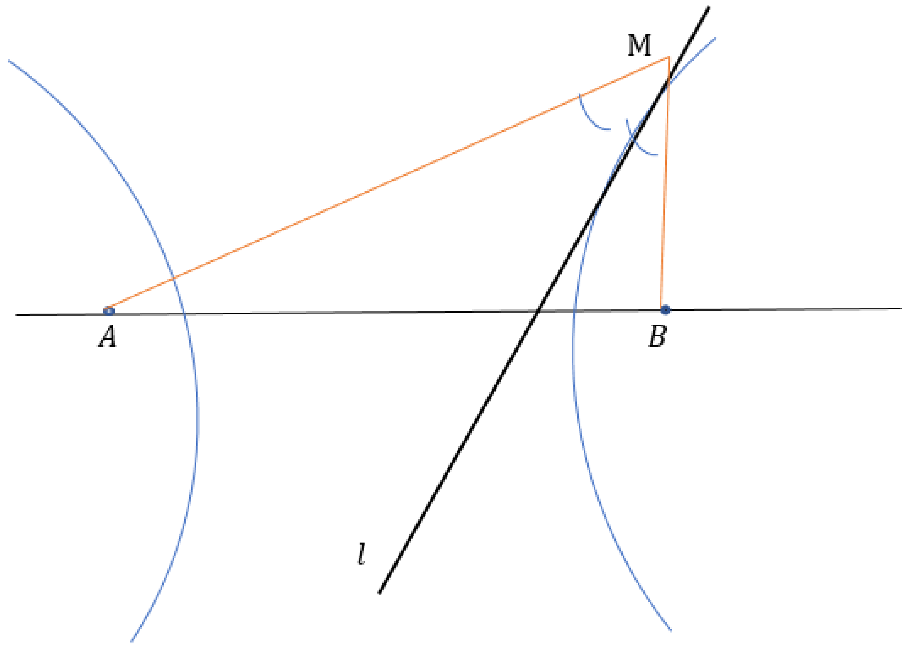


Рис3

О том , почему это свойство называется "оптическим", мы поговорим ниже, а сейчас обратимся к гиперболе и параболе . Оптические свойства этих линий ясны из рисунков 3 и 4 . На рисунке 3 точки A и B является фокусами гиперболы, а рисунке 4 точка A - фокус , а прямая d – директориса параболы. В обоих случаях оптическое свойство выражается условием $\angle 1 = \angle 2$.

Для гиперболы доказательства оптического свойства аналогично доказательству , проведенному для эллипса, только надо воспользоваться задачей о нахождении на прямой l такой точки, для которой расстояний от двух заданных точек A, B на и большая . Предоставляем читателю самостоятельно провести это доказательство.

Рассматривая тем, что для точки N, лежащей на самой параболе, справедливо равенство $|\mathrm{AN}| = |\mathrm{NH}|$ (рис5), а для точки $\mathrm{N'}$, лежащей во внутренней области параболы, $|\mathrm{AN'}| < |\mathrm{N'H'}|$. Если теперь провести биссектрису l угла АМК (рис5), то для любой отличной от M точки $\mathrm{M'}$ прямой l найдем $|\mathrm{AM'}| = |\mathrm{M'К}| > |\mathrm{M'К'}|$

то есть точка $\mathrm{M'}$ лежит во внешней области параболы. Итак вся прямая l, кроме точки М , лежит во внешней области, то есть внутренняя область параболы лежит по одну сторону от l, а это означает , что l - касательная к параболе. Это и дает доказательства оптического свойства параболы: $\angle 1 = \angle 2$, так l – биссектриса угла АМК $*$)

ISSN 2181-3187

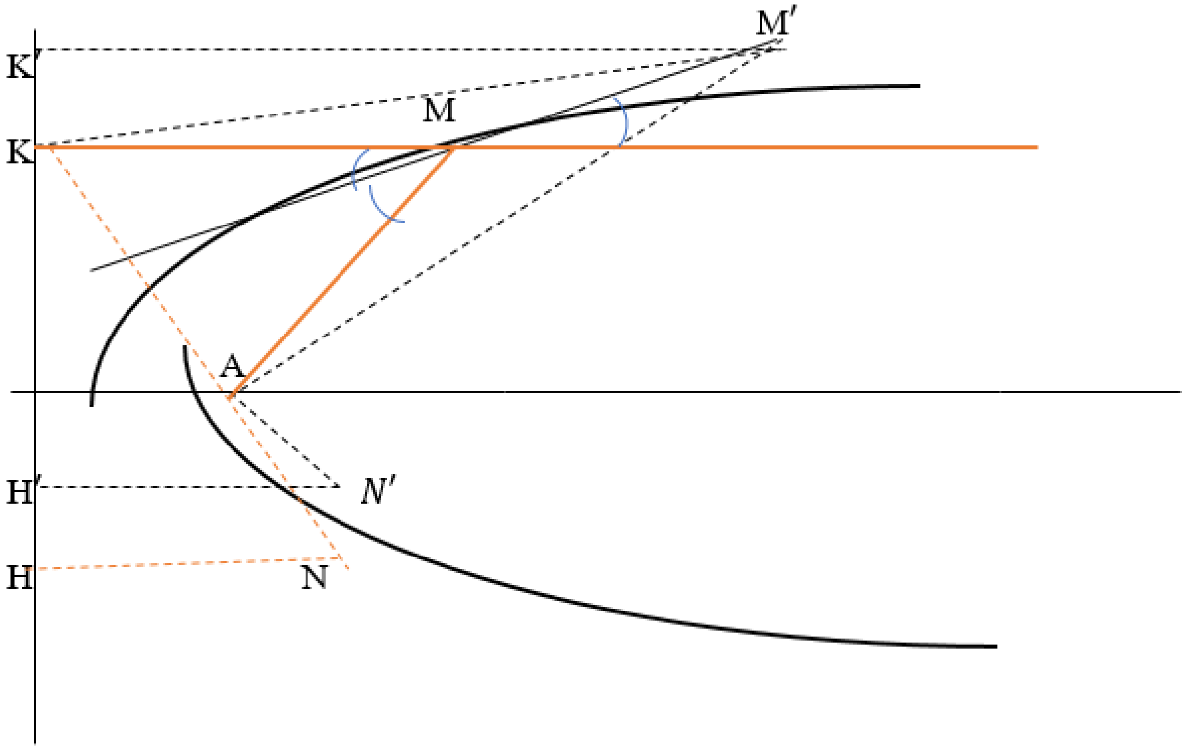
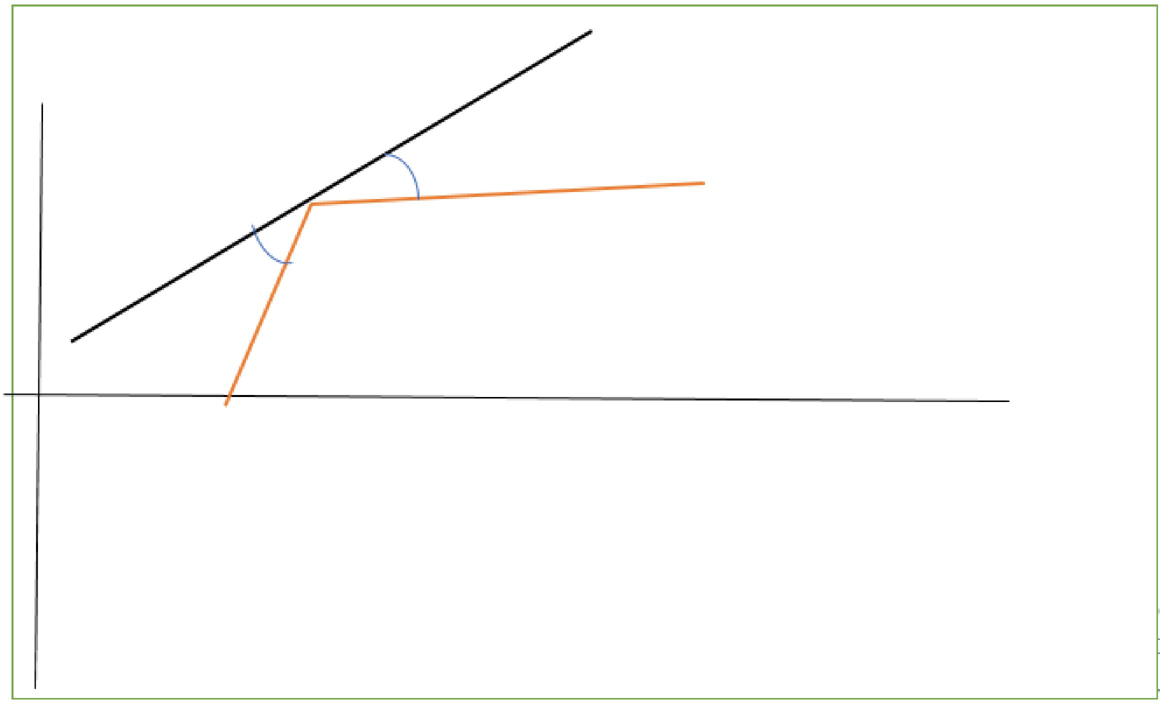


Рис5

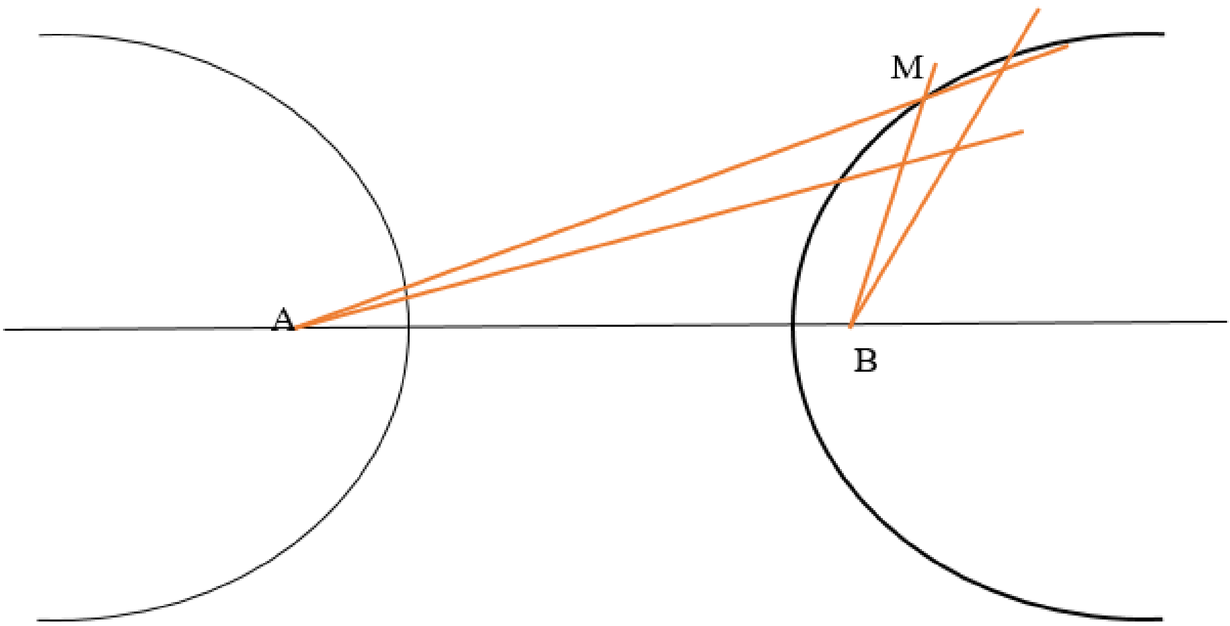


Можно указать еще один способ доказательства оптического свойства; рассмотрим его на примере гиперболы. Возьмем на гиперболе две очень близкие точки M и M_1(рис6), и пусть P — точка пересечения прямых AM и BM_1, а Q - точке пересечения прямых AM_1 и BM. Посмотрим теперь "лупу" на

ISSN 2181-3187

четырехугольник М РМQ (рис7). Мы можем считать (приблизительно), что [РМ$_1$] [МQ] и [РМ] [М $_1Q$], так как точки А и В находятся очень далеко - сравнительно с размерами четырехугольника М $_1$РМQ . Итак будем считать (приближенно) , что М $_1$РМQ параллелограмм. Проведем теперь окружности с центрами А и В , проходящие через точку М$_1$Вблизи рассматриваемого параллелограмма (см рис7) дуги этих окружностей будет представляться прямыми М $_1$К и М $_1L$, перпендикулярными сторонам параллелограмма. Мы имеем:

Рис6



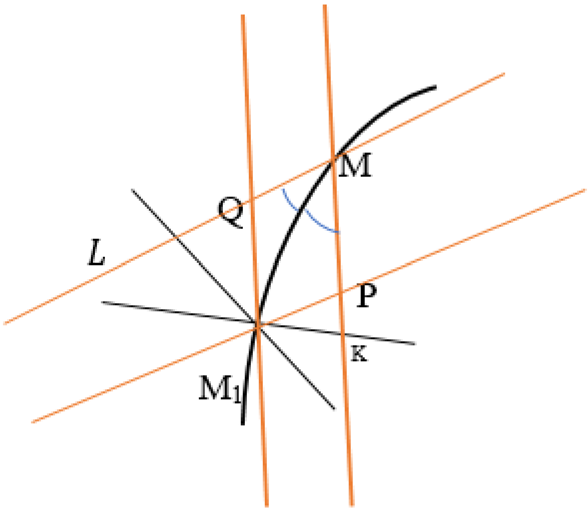


Рис. 7.

$$|\mathrm{AM}| - |\mathrm{BM}| = (|\mathrm{AK}| + |\mathrm{KM}|) - (|\mathrm{B}L| + |L\mathrm{M}|)$$
$$= (|\mathrm{AM}_1| + |\mathrm{KM}_1|) - (|\mathrm{BM}_1| + |L\mathrm{M}|)$$
$$= (|\mathrm{AM}_1| - |\mathrm{BM}_1|) + (|\mathrm{KM}| - |L\mathrm{M}|).$$

ISSN 2181-3187

Но так как обе точки М, М1 лежит на гиперболе, то $|AM - |BM| = |AM_1| - |BM_1|$ и потому $|KL| = |LM|$. Полученное равенство означает, что прямоугольные треугольники KMM_1 и LMM_1 конгруэнтны (по гипотенузе и катету и следовательно, $\angle 1 \cong \angle 2$

Эго и дает доказательство оптического свойства (для того чтобы это " приближенное" рассуждение сделать точным, нужно еще перейти к пределу при $M_1 \geq M$)

Теперь рассмотрим некоторые оптические и механические интерпретации доказанного свойства. Предположим, что эллипс представляет собой "зеркальную" кривую , от которой луч света отрожается по закону " угол падения равен углу отражения" . Если в одном фокусе такого зеркального эллипса помещен точечный источник света , то после отражения от стенок эллипса все лучи пройдут через второй фокус , это является непосредственным следствием оптического свойства. Описанное явление можно наблюдать реально, в трехмерном пространстве . Для этого нужно взять поверхность, получающуюся вращением эллипса вокруг прямой проходящей через его фокусы

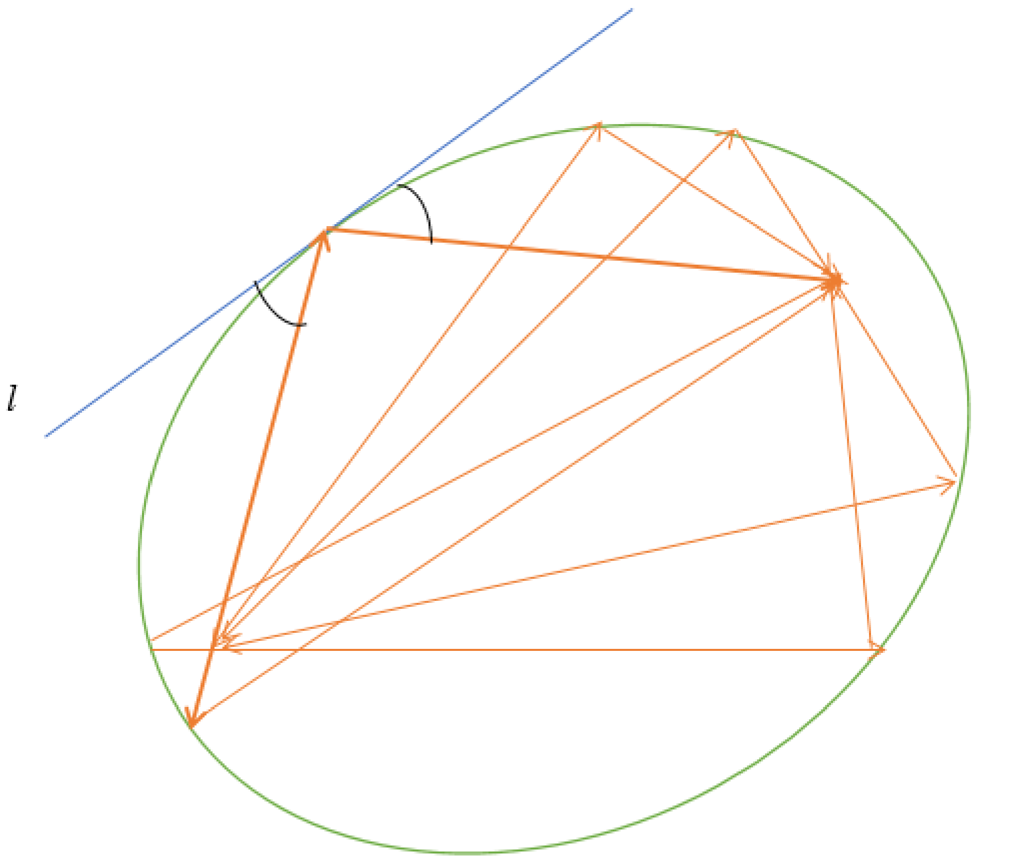


рис8

ISSN 2181-3187

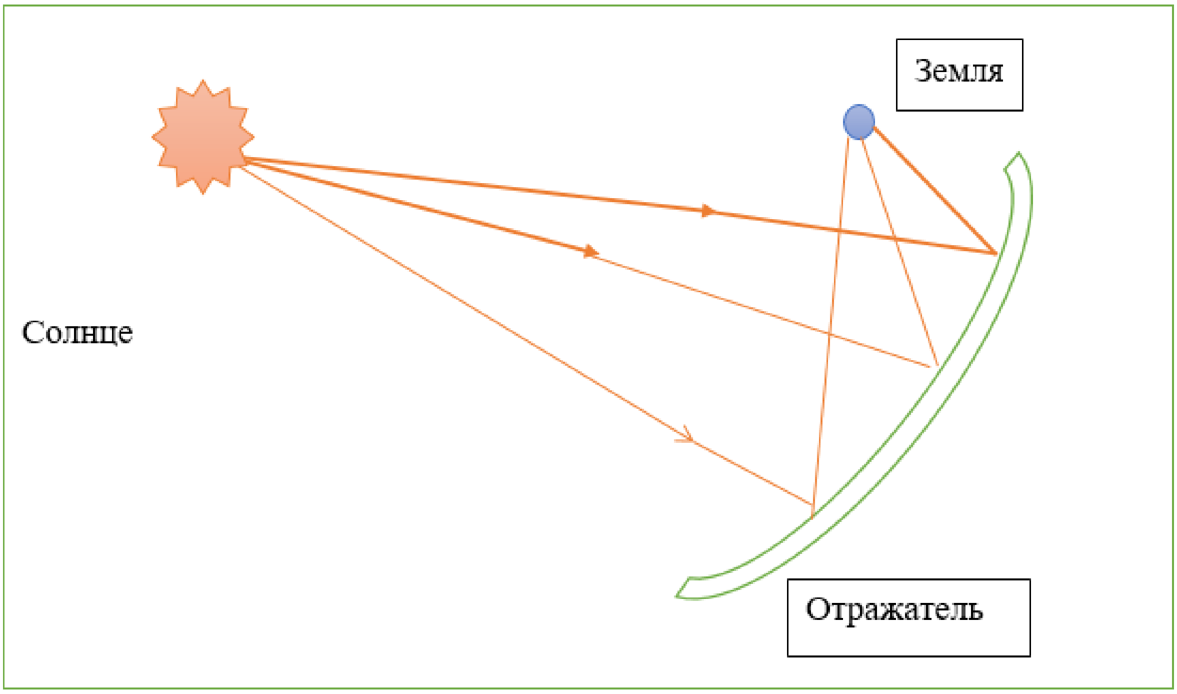


рис9

Если такую поверхность, называемую эллипсоидом вращения покрыть изнутри зеркальным слоем, а в одном из фокусов поместить точечный источник света ("солнце") то наблюдатель , находящийся внутри эллипсоида , увидит два "солнца" . В самом деле, обратив взгляд в первому фокусу , наблюдатель непосредственно увидит размещеное там " солнце" . Но и , посмотрев в направлении второго фокуса (где в действительности ничего нет), он также увидит " солнце" (рис8). И как бы ни перемещался наблюдатель внутри зеркальнего эллипсоида , на него почти везде будут светить два " солнца" . Аналогично картину можно наблюдать внутри зеркальнего гиперболоида вращения или параболоида вращения.

Но вот наблюдатель, находящийся внутри зеркальнего эллипсоида, решил принять меры, которые избавят его от "мнимого солнца" , и поместил во втором фокусе небольшое непрозрачное тело ("экран"), преграждающее путь отроженным лучам . Результат

оказывается несколько неожиданным : теперь все лучи , исходящий от " солнца" А , после отражения от зеркальнего эллипсоида собираются ("фокусироваться") на " экране" В , и это может вызвать интенсивный его разогрев . И заметьте для такой фокусировки не обязательно иметь целый зеркальный эллипсоид, а можно использовать лишь часть его поверхности

А что увидет "несгораемый" наблюдатель оказавшийся во втором фокусе В зеркальнего эллипсоида если в первый его фокус А поместить источник света?

ISSN 2181-3187

Все лучи входящие из точки А и отражающиеся от эллипсоида, поподают в точку В . Таким образом, для наблюдателя весь эллипсоид будет светиться.

Иллюстрацию этого явления вы видите на первой странице обложки - в качестве источника света использована свеча , а роль зеркальнего эллипсоида играет рефлектор электрокамина (хотя нельзя ручаться, что он имеет в точности форму эллипсоида, но и свеча - не точка и ее размеры компенсируют неправильность формы рефлектора).

Если, например, изготовить, зеркальный эллиптический отражатель в одном фокусе которого находится Солнце (настоящее!) , а в другом - котел с водой, то можно добиться кипения воды в котле за счет сфокусированного отражателем излучения Солнца.

Увидительного в этом ничего нет: ведь отражатель имеет большую площадь, и со всей его поверхности солнечная на обогрев котла . Такие солнечные установки уже сейчас имеют некоторые применение. А в будущем (кто знает), может быть, удастся, построив огромный зеркальный отражатель (рис9), использовать энергию тех лучей , которые проходят мимо Земли?

Если считать солнечные лучи приблизительно параллельным , то для их фокусировки можно использовать оптическое свойство параболы (рис10). Впрочем , сравнительно небольшая дуга очень вытянутого эллипса практически не отличается от дуги параболы.

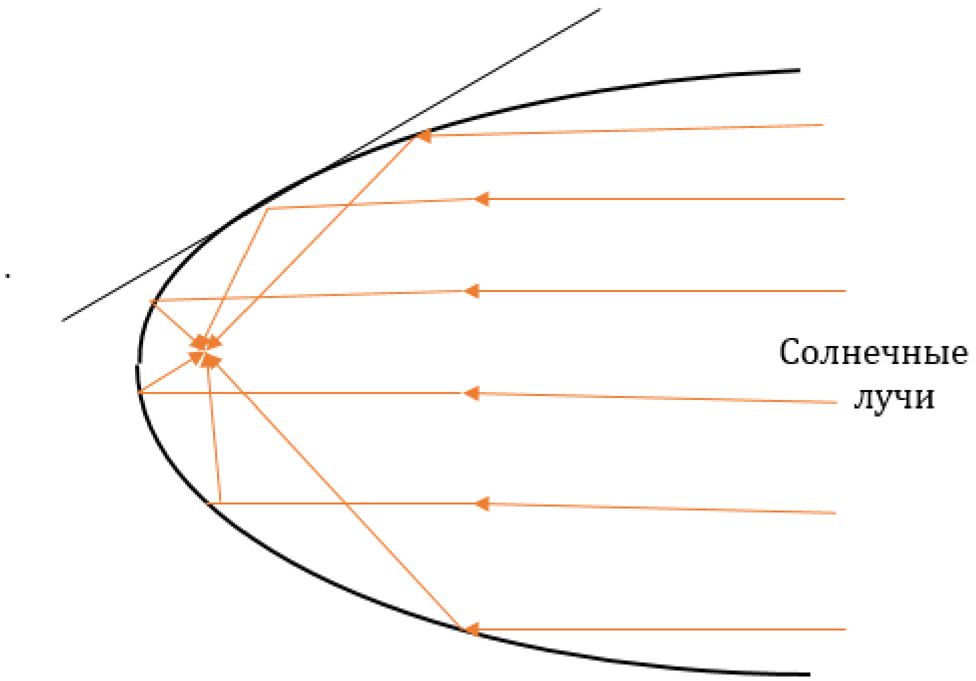


рис10

ISSN 2181-3187

Применяются параболические рефлекторы (отражатели) и в современных телескопах . Конечно, в этом случае свет далекой звезды фокусируют не с целью разогрева, а для того , чтобы звезду можно было увидеть (например, чтобы собранного рефлектором света было достаточно для воздействия на фотопленку).

Если в солнечныех установках и телескопах свет идущий от далекого источника практически из бесконечности собирается в фокусе то в прожекторе - наоборот свет от мощной лампы помещенной в фокусе после отражения от параболического рефлектора уходит параллельным пучком лучей черные линии на рисунке 11. Если же лампу чуть удалить от зеркала то рефлектор действует наподобие эллиптического - получается "почти" сходящийся пучок лучей (красные линии). Приближение же лампы к зеркалу дает примерно такую же картину лучей, что и в гиперболическом

отражателе: лучи расходятся (синие линии). Такие рефлекторы используются не только в прожекторах или автомобильных фарах , но и в проекционных приборах , медитцинскых установках (лампы синего света, кравцевые лампы и др.).

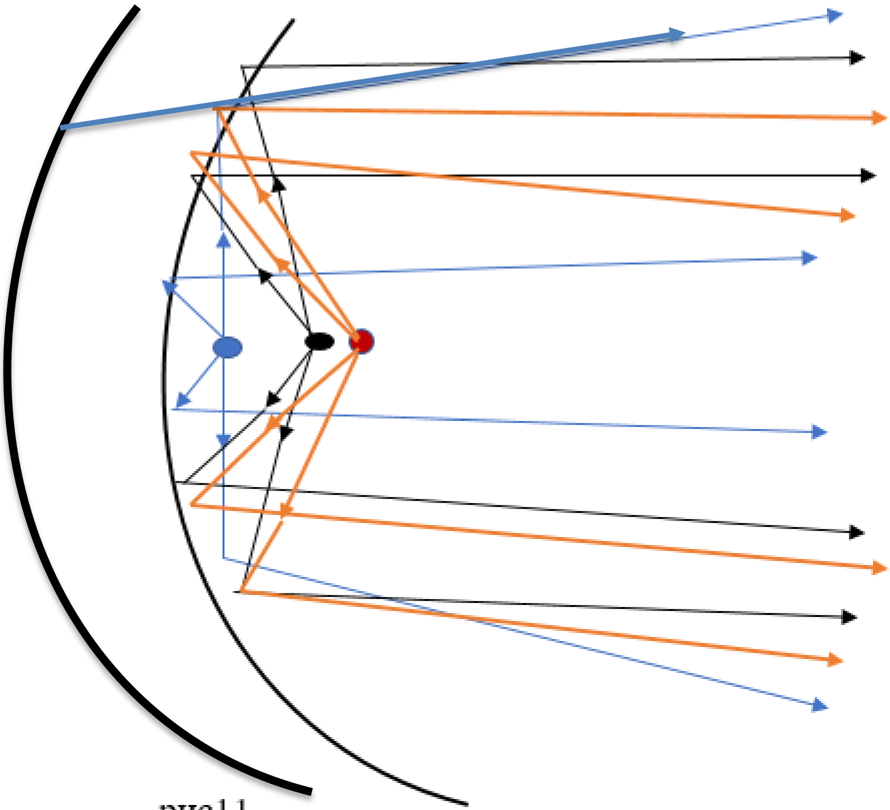


рис11

ISSN 2181-3187

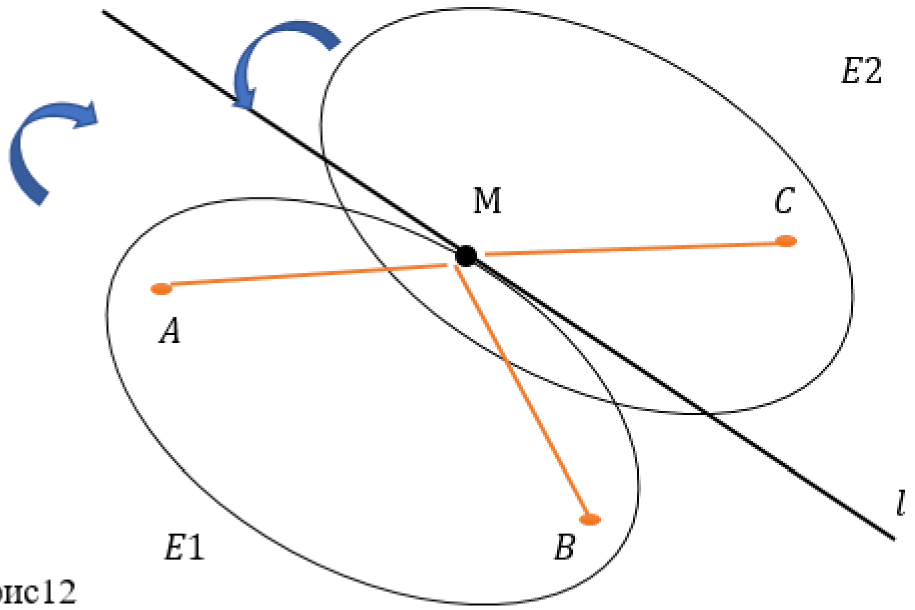


рис12

Наконец, укажем еще одно - на этот раз механическое - примерие оптического свойства. На рисунке 12 изображение эллипс Е $_1$и симметричный ему относительно касательной l эллипс E_2. Из чертежа видно , что точки А , М и С лежат на одной прямой, причем

$$|AC| = |AM| + |MC| = |AM| + |MB|,$$

то есть расстояние между точками А и С равно большой оси эллипса. Закрепим теперь эллипсы в точкых А и С так , чтобы они могли вращается вокруг этих точек . Если вращать эллипс E_1 вокруг точки А, то для каждого его положения существует точка М, в которой эллипс пересекает отрезок АС ; проведя в точке М касательную , найдем единственное соответствующее положение эллипса E_1. Иными словами , эллипс E_2будет также вращается (вокруг точки С), увлекаемся эллипсом E_1. На этом основаю устройство эллиптической зубчатой передачи: она преобразует равномерное вращение эллипса E_1 вокруг точки А в неравномерное вращение эллипса E_2 вокруг точки С.

Краткое содержание:

Таким образом, эллипсы, гиперболы и параболы обладают уникальными оптическими свойствами, которые делают их важными кривыми в области оптики. Их фундаментальные свойства, уравнения и приложения необходимы для проектирования, анализа и оптимизации оптических систем в различных областях, включая астрономию, визуализацию и лазерные технологии. Изучение этих кривых необходимо для развития нашего современного общества и для решения многих задач, стоящих перед оптикой.

ISSN 2181-3187

Список источников

1. A.Y. Narmanov. "Analitik geomertiya".
2. A.R.Artikov. Analitik geomertiya. Uslubiy qo'llanma. Samarqand 2006.
3. M.Komolov.Analitik geometriya.-"O'qituvchi" , Toshkent, 1972.
4. Fazliddinovich S. X., Fazliddinova S. S. MATEMATIKA DARSLARIDA VIZUALIZATSIYALASHTIRISH USULLARIDAN FOYDALANISH //International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research. – 2022. – С. 289-292.
5. Шарипов Хуршид Фазлиддинович, & Шарипова Садокат Фазлиддиновна. (2022). РЕАЛИЗАЦИЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА В ПЛАНИМЕТРИИ И ЕЕ АНАЛОГ. International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research, 1(2), 373–377. Retrieved from https://journal.jbnuu.uz/index.php/ijcstr/article/view/207.
6. Шарипова С. Ф., Олтмишев А. СОВРЕМЕННЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ. – 2022.