ISSN 2181-3187

RATSIONAL KASRLARNI ENG SODDA KASRLARGA YOYISH YO'LI BILAN INTEGRALLASH

Jumanov Dilshod Ilxom o'g'li,
Abdullayeva Munisaxon Lazizxon qizi,
Rustamov Xurshid Rustam o'g'li
O'zMU Jf talabalari
Sharipova Sadoqat Fazliddinovna
O'zMU Jf katta o'qituvchisi ilmiy rahbar

Annotatsiya: ratsional kasrlarni eng sodda kasrlarga yoyish yo'li bilan integrallash usullari haqida bayon qilingan. Amaliy masalalar yechishga ko'rsatmalar berilgan.

Kalit so'zlar: funksiya, kasr-ratsional, integral, koeffisiyent, integrallash jadvali, rekurent formula

Ma`lumki, $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+....+a_{n-1}x+a_n$ funksiya darajali ko'phad deyiladi. Bunda $a_0, a_1, a_2.... a_n$- ko'phadning koeffisiyentlari, n - daraja ko'rsatkichi.

Ikki ko'phadning nisbati kasr-ratsional funksiya yoki ratsional kasr deyiladi:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+....+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_{n-1}x+a_n}$$

Agar $m<n$ bo'lsa, u holda ratsional kasr to'g`ri, agar $m\geq n$ bo'lsa,u holda ratsional kasr noto'g'ri kasr bo'ladi.

$R(x)$- ratsional kasr noto'g'ri bo'lgan hollarda kasrning $Q_m(x)$ suratini $P_m(x)$ maxrajiga odatdagidek bo'lish yo'li bilan uning butun qismini ajratish kerak:

$$\begin{array}{l|l} Q_m(x) & \frac{P_n(x)}{q(x)} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \hline r(x) & \end{array}$$

$q(x)$ bo'linma va $r(x)$ qoldiq ko'phad bo'ladi, bunda $r(x)$ qoldiqning darajasi $P_n(x)$ bo'luvchining darajasidan kichikdir. $Q_m(x)$ bo'linuvchi $P_n(x)$ bo'luvchi hamda bo'linmaning ko'paytmasi bilan qoldiqning $r(x)$ yig'indisiga teng bo'lgani uchun

$$Q_m(x)=P_n(x)\cdot q(x)+r(x) \quad \text{yoki} \quad \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{P_n(x)}$$ ayniyatni hosil qilamiz.

Bunda $q(x)$ - butun qismi; $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ - esa to'g'ri kasr bo'ladi.

ISSN 2181-3187

Shunday qilib, noto'g'ri ratsional kasr bo'lgan holda, undan *q(x)* butun qismni va $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ to'g'ri kasrni ajratish mumkin. Demak, noto'g'ri ratsional kasrni integrallash ko'phadni va to'g'ri ratsional kasrni integrallashga keltiriladi.

Misol: $R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}$

noto'g'ri ratsional kasrni butun qismini ajrating.

Yechish : *R(x)* - ratsional kasr noto'g'ri kasr, chunki suratning darajasi maxrajning darajasidan katta *(4>2)*

Ko'phadlarni bo'lish qoidasi bo'yicha suratni maxrajga bo'lamiz.

$$\begin{cases}2x^4-3x^3+1\\ 2x^4+2x^3-4x\end{cases}\Bigg|\frac{x^2+x-2}{2x^2-5x+9}$$

$$-\begin{cases}-5x^3+4x^2+1\\ -5x^3-5x^2+10x\end{cases}$$

$$-\begin{cases}9x^2-10x+1\\ 9x^2+9x-18\end{cases}$$

$$-----------$$

$$-19x+19$$

Shunday qilib, $R(x)=2x^2-5x+9+\frac{-19x+19}{x^2+x-2}$ ni hosil qilamiz.

Quyidagi ko'rinishdagi kasrlar eng sodda ratsional kasrlar deyiladi.

$I\ \frac{A}{x-a}$

$II\ \frac{A}{(x-a)^K};(K\geq 2 \text{ va } butunson)$

$III\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}(D<0)$

$IV\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^S}(S\geq 2 \text{ va } butun \text{sonlar, hamda } D<0)$

Bunda *A, B*- haqiqiy koeffisiyentlar, *a, p, q* lar ham haqiqiy sonlar.

Ushbu $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasrni qarab chiqamiz, bu kasrning *Pn(x)* maxraji $(x-a)^K$, $(x^2+px+q)^S$ ko'rinishdagi chiziqli va kvadrat ko'paytuvchilarga yoyiladi, bunda $(x-a)^K$ ko'rinishdagi ko'paytuvchi *K* karralikdagi haqiqiy ildizga mos keladi.

$(x^2+px+q)^S$ ko'rinishdagi ko'paytuvchi *S* karralikdagi kompleks qo'shma ildizlarga mos keladi.

ISSN 2181-3187

$Pn(x)=a_1(x-\alpha_1)^{K1}\ (x-\alpha_2)^{K2}....(x-\alpha_t)^{Kt}-(x^2+p_1x+q_1)^{S1}\cdot(x^2+p_2x+\ q_2)^{S2}...(x^2+px+\ q_i)^{Si}$ *(1)*

Har qanday $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ ratsional kasrni *I, II, III, IV* turdagi oddiy kasrlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin. Bunda

a) *(1)* yoyilmaning $(x-\alpha)$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga *I* turdagi bitta $\frac{A}{x-\alpha}$ kasr mos keladi.

b) *(1)* yoyilmaning $(x-\alpha)^K$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga *I* va *II* turdagi *K* ta kasr mos keladi.

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^K}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{K-1}}+\frac{A_3}{(x-\alpha)^{K-2}}+.....+\frac{A_q}{(x-\alpha)}$$

v) *(1)* yoyilmasining (x^2+px+q) ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga *III* turdagi kasr mos keladi.

g) *(1)* yoyilmaning $(x^2+px+q)^S$ ko'rinishdagi ko'paytuvchisiga *III* va *IV* turdagi *S* ta kasr mos keladi.

$$\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+px+q\right)^{e1}}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^{e-1}}+.....+\frac{A_ix+B_i}{x^2+px+q};$$

1-Misol . $R(x)=\frac{x+2}{x^3-x};$

$$R(x)=\frac{x+2}{x^3-x}=\frac{x+2}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x+2}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1};\quad A,B,C=?$$

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga keltiriladi.

$$I.\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

$$II.\int\frac{Adx}{(x-a)^K}=A\int(x-a)^{-K}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-K+1}}{-K+1}+C=\frac{A}{(1-K)(x-a)^{K-1}}+C;$$

III. Turdagi integrallarni ko'rib chiqamiz:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,‡—'Ъ—D=\frac{P^2}{4}-q<0$$

Suratda kasrning maxrajidan olingan hosilani ajratamiz.

$(x^2+px+q)^1=2x+p$

$$III.\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{x^2+px+q};$$

Integrallardan birinchisi $ln|x^2+px+q|$ ga teng. Ikkinchi integralni hisoblash uchun maxrajida to'liq kvadratni ajratamiz.

ISSN 2181-3187

$x^2+px+qq\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+q-\frac{P^2}{4};$

Bunda $q-\frac{P^2}{4}>0$, chunki shartga ko'ra $D=\frac{P^2}{4}-q<0$

Demak, ikkinchi integral jadval integraliga keladi. Shunday qilib,

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{P^2}{4}}=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{P^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{P}{2}}{\sqrt{q-\frac{P^2}{4}}}+C$$

1-Misol . Integralni hisoblang.

$$J=\int\frac{3x+8}{x^2+4x+8}dx;$$

Yechish: suratda maxrajining hosilasini ajratamiz.

$(x^2+4x+8)^1=2x+4$

$$J=\int\frac{3x+8}{x^2+4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-\frac{3}{2}\cdot4+8}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx+2\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$$

Birinchi integral $ln|x^2+4x+8|$ ga teng. Ikkinchi integralning maxrajida to'liq kvadrat ajratamiz.

$(x^2+4x+8)=(x+2)^2-4+8=(x+2)^2+2^2$

Natijada quyidagini hosil qilamiz.

$$J=\frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8|+2\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8|+\text{arctg}\frac{x+2}{2}+C;$$

Endi IV turdagi integralni hisoblaymiz.

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx\text{; bunda }D=\frac{P^2}{4}-q<0$$

Bunda ham x^2+px+q uchxadning hosilasini ajratishdan boshlaymiz.

$$\left(x^2+px+q\right)'=2x+p$$

$$IV.\int\frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}$$

Birinchi integralni hisoblasak bo'ladi:

ISSN 2181-3187

$$\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int (x^2+px+q)^{-n} d(x^2+px+q) = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}$$

Ikkinchi integralni hisoblaymiz:

$\left(x+\frac{p}{2}\right)=t;\quad dx=dt$ belgilashlarni kiritamiz. $0<q-\frac{p^2}{4}=a^2$ deb olamiz.

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n};$$

Oxirgi integralga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz:

$$U=t \qquad dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n};$$

$$du=dt \qquad v=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}$$

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^n} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

Agar $J_n=\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}$ deb belgilasak, quyidagini hosil qilamiz.

1) $$J_n=\frac{t}{2(n-1)a^2\cdot(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\cdot J_{n-1}$$

Bu jarayon quyidagi integralni hosil qilgunimizcha davom etadi.

$$J_1=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C$$

formula rekurent (qaytuvchan) formula deyiladi.

Xulosa:

Yuqorida bayon etilganlarning hammasidan, har qanday ratsional funksiyadan olingan integral ohirida elementar funksiyalar orqali ifoda etilishi mumkin ekanligi kelib chiqadi, jumladan

1) I tipdagi sodda kasrlar bo'lgan holda – logarifmlar bilan;
2) II tipdagi sodda kasrlar bo'lgan holda – ratsional funksiyalar bilan;
3) III tipdagi sodda kasrlar bo'lgan holda – logarifmlar va arktangenslar bilan;
4) IV tipdagi sodda kaslar bo'lgan holda – ratsional funksiyalar va arktangenslar bilan chekli shaklda ifoda etiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Algebra va matematik analiz asoslar. A.U.Abduhamidov va boshqalar.Toshkent 2014-yil.
2. Aniqmas integrallarda integrallash usullari. A.Begmatov. Samarqand. 2011

ISSN 2181-3187

3. Sharipova S., Sharipov X. Орбиты семейства векторных полей и гиперболический параболоид //Журнал математики и информатики. – 2022. – Т. 2. – №. 1.
4. Шарипов Хуршид Фазлиддинович, & Шарипова Садокат Фазлиддиновна. (2022). РЕАЛИЗАЦИЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА В ПЛАНИМЕТРИИ И ЕЕ АНАЛОГ. International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research, 1(2), 373–377. Retrieved from https://journal.jbnuu.uz/index.php/ijcstr/article/view/207
5. Fazliddinovich S. X., Fazliddinova S. S. MATEMATIKA DARSLARIDA VIZUALIZATSIYALASHTIRISH USULLARIDAN FOYDALANISH //International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research. – 2022. – С. 289-292.
6. Safarali o‘g‘li X. Y. et al. KONUS KESIMLARNING NOODATIY TA’RIFI. – 2022.