BIR JINSLI CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI VA UNING TADBIQLARI

Ismatov Muhammad
Eshpolatov Otabek
Xaytboyev Nurlon
Shukurov Jasur

Annotatsiya: Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki har doim sistemaning yechimi bo‘ladi. Bir jinsli sistema uchun munosabat o‘rinli bo‘lsa, sistema aniq bo‘lib, yagona nol yoki trivial yechimga ega. Ushbu ishda bir jinsli tenglamalar sistemasini yechish usullari misollar yordamida ko‘rsatilgan.

Kalit so’zlar: bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi, fundamental yechimlar sistemasi, aniqlik shartlari, bir jinsli bo’lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xosallarga ega:

1.Agar $x_0=(b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)$ vektorlar AX = Θ sistemaning yechimi bo’lsa, u holda k ixtiyoriy son bo’lganda ham $kX_0=(kb_1,kb_2,\ldots.,kb_n)$ vektorlar ham bu sistemaning yechimi bo’ladi.

2.Agar $x_0=(b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n)$ va $X_1=(c_1,c_2,\ldots.,c_n)$ vektorlar AX=Θ sistemaning yechimlari bo’lsa, u holda $X_0 + X_1 = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_n + c_n)$ vector ham bu sistemaning yechimi bo’ladi.

Shuning uchun bir jinsli Sistema yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham uning yechimi bo’la oladi.

Bir jinsli bo’lmagan Sistema yechimlari uchun yuqoridagi da’vo o’rinli emas.

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots., A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

n o’lchovli vektorlar sistemasini ko’rib chiqamiz.

1-tarif. Agar $x_1A_1 + x_2A_2 +, \ldots., x_nA_n = \Theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida bittasi noldan farqli $x_1, x_2, \ldots.. x_k$ sonlar mavjud bo’lsa u holda $A_1, A_2, \ldots., A_k$ vektorlar sistemasi <u>chiziqli erkli vektorar sistemasi</u> deb ataladi

Izoh. $x_1A_1 + x_2A_2 +, \ldots., x_nA_n = \Theta$ vector bir jinsli tenglamalar sistemasini ifodalaydi. Masalan, $A_1=\binom{1}{2}, A_2 = \binom{2}{3}, A_3 = \binom{-1}{2}$ vektorlar sistemasini qaraymiz.

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = \Theta$$

ISSN 2181-3187

Vektorlar quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimini Gauss usulida topamiz.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ \quad\quad 3x_2+2x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-7x_3 \\ x_2=4x_3 \\ x_3\in\mathrm{R} \end{cases}.$$

Ko'rinib turibdiki, tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega. $x_3=3$ deb olsak, $x_1=-7$, $x_2=4$ qiymatlarni topamiz. Ya'ni

$$-7A_1+4A_2+A_3=\Theta$$

Demak, ta'rifga asosan, qaralayotgan vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

Yuqorida aytib o'tilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining xossalari va Kroneker-Kapelli teoremasiga asosan quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

*Tasdiq***.**Agar $A_1,A_2,\ldots,A_k$ vektorlar sistemasining rangi $(A_1,\ldots,A_k)$ vektorlar soni k dan kichik bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq boladi.Agar r=k bo'lsa, u holda $A_1,A_2,\ldots,A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli boladi.

Xususan, bu tasdiqdan, bir xil o'lchovli vektorlar sistemasidagi vektorlar soni bu vektorlarning o'lchovidan, ya'ni rangidan katta bo'lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lishi kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $A_1,A_2,\ldots,A_k$ vektorlar sistemasining rangi, ta'rifga asosan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1}\ a_{n2} & & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Matrisa rangiga teng. Shartga ko'ra k>n, r(A)≤min(n,k)=n<k. U holda AX=Θ tenglamada noma'lumlar soni tenglamalar sistemasi rangidan katta. Demak, Sistema trivial bo'lmagan (noldan farqli) yechimga ega, ya'ni, vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq.

2. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi.

2-ta'rif. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday maksimal sondagi chiziqli erkli sistemasi bu tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

2-teorema. AX = Θ tenglamalar sistemasining har qanday yechimi fundamental yechimlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. $X_1,X_2,\ldots,X_k$ vektorlar sistemasi $AX=\Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi bo'lsin. X0 vektor esa tenglamalar sistemasining boshqa ixtiyoriy yechimi bo'lsin. U holda, ta'rifga asosan, $X_0,X_1,X_2,\ldots,X_k$, vektorlar

ISSN 2181-3187

sistemasi chiziqli bog‘liq. Ya’ni shunday kamida bittasi noldan farqli $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sonlar mavjudki,

$$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k = \Theta.$$

Agar bu tenglikda $\alpha_0 = 0$ bo’lsa, $\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k = 0$, ya’ni $X_1, X_2, \dots, X_k$vektorlar chiziqli bog’liq. Bu esa teorema shartiga zid. Demak, $\alpha_0 \neq 0$.Shu sababli

$$X_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} X_1 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} X_k.$$

Bu Teoremadan muhim bo’lgan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Tasdiq. Agar $F_1, F_2, \dots, F_k$ n o’lchovli vektorlar sistemasi AX = Θ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo’lsa, bu bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$X = c_1 F_1 + c_2 F_2 \ldots + c_k F_k$$

Shaklda ifodalanadi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

3-teorema. Bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining rangi r ga teng bo‘lib, sistema noma’lumlari soni n dan kichik bo‘lsin. U holda tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi $n-r$ ta nolmas vektorlardan iborat bo‘ladi.

Teoremadan ko‘rinib turibdiki, fundamental yechimlar sistemasidagi vektorlar soni bu sistemaga mos erkli o‘zgaruvchilar soniga teng ekan. Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasini quyidagicha qurishimiz mumkin:

1. Bir jinsli sistemaning rangi topiladi;

2. $n-r$ ta erkli o‘zgaruvchilarga qiymat beramiz. Buning uchun $n-r$ ta o’lchovli $n-r$ ta vektorlardan iborat chiziqli erkli vektorlar sistemasi tanlanadi. Bunda masalan, har bir vektori $n-r$ o’lchovli $A_1 = (1,0,\dots,0)^T$, $A_2 = (0,1,\dots,0)^T$,…, $A_{n-r} = (0,0,\dots,1)^T$ sistemani tanlash mumkin;

3. Erkli noma’lumlar o‘rniga yuqorida tanlangan A1 vektorning mos koordinatalarini qo‘yib, bazis noma’lumlar aniqlanadi va F1 quriladi. Xuddi shunday usulda $A_2, A_3, \dots, A_{n-r}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda $F_2, F_3, \dots, F_{n-r}$ yechimlar quriladi.

$F_1, F_2, \dots, F_{n-r}$ vektorlar sistemasining rangi ularning qismi bo’lgan $A_2, A_3, \dots, A_{n-r}$ vektorlar chiziqli erkli bo’lgani sababli bu vektorlar sistemasi rangi maksimal, n-r ga teng. Shu sababli, $F_1, F_2, \dots, F_{n-r}$ vektorlar sistemasi rangi ham maksimal, ya’ni n-r ga teng, ya’ni bu yechimlar sistemasi chiziqli erkli

2-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechish. Bu sistemada r=2, n=5. Demak, sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi *n-r=3* ta yechimdan iborat bo'ladi.

1.Bu yerda x_3, x_4, x_5 noma'lumlarni ozod no'malumlar, deb hisoblab sistemani yechamiz va quyidaagi umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5, \end{cases}$$

2.So'ngra uchta chiziqli erkli uch o'lchovli vector olamiz:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

3. Bu vektorlarning har birining komponentlari umumiy yechimga ozod noma'lumlarning qiymatlari sifatida keltirib qo'yib, x_1, x_2 larning qiymatlarini hisoblab, berilgan tenglamalar sistemasining quyidagi fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$F_1 = (\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1,0,0)^{\ T}$$

$$F_2 = (\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0,1,0)^{\ T}$$

$$F_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0,0,1)^{\ T}$$

Sistemaning umumiy yechimi X=$c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3$ yoki

$$F = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}19/8\\7/8\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}3/8\\-25/8\\0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Bu yerda c_1, c_2va c_3 ixtiyoriy sonlar.

3. *Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari yechimlari orasidagi boglanish. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasinig umumiy yechimi.*

ISSN 2181-3187

n noma'lumli *m* ta chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi matrisalar yordamida AX=B ko'rinishida ifodalangan bo'lsin. Bunda A-$m\times n$ o'lchovli matrisa, X-n o'lchovli noma'lumlardan iborat ustun vector, B -m o'lchovli ozod hadlar vektori.

AX=Θ tenglamalar sistemasi $AX=B$ bir jinsli bo'lmagan sistemaning bir jinsli qismi deyiladi.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimini vector shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$X = F_0 + c_1F_1 +, \dots, +c_{n-r}F_{n-r}$$

Bu yerda F_0-dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy yechimlaridan biri(

F_0 ni aniqlash uchun erkli o'zgaruvchilarning xususiy qiymatlarida bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi yechiladi); F_1, F_2 …., F_{n-r} -bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasi; $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ -ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Gilbert Strang "Introduction to Linear Algebra", USA, Cambridge press, 5 nd Edition, 2016.
2. Grewal B.S. "Higher Engineering Mathematics", Delhi, Khanna publishers, 42nd Edition, 2012.
3. Raxmatov R.R., Adizov A.A., Tadjibayeva Sh.E., Shoimardonov S.K. Chiziqli algebra va analitik geometriya. O'quv qollanma. Toshkent 2020.
4. Raxmatov R.R., Adizov A.A. "Chiziqli fazo va chiziqli operatorlar" O'quv uslubiy qollanma. TATU, Toshkent 2019.
5. Соатов Ё.У. "Олий математика", Т., Ўқитувчи нашриёти, 1- 5 қисмлар, 1995.
6. Рябушко А.П. и др. "Сборник индивидуальных заданий по высшей математике", Минск, Высшая школа, 1-3 частях, 1991.
7. Adizov A.A., Xudoyberganov M.O'. Amaliy matematika. O'quv uslubiy qo'llanma. Toshkent. 2014.
8. Sharipova S., Sharipov X. Орбиты семейства векторных полей и гиперболический параболоид //Журнал математики и информатики. – 2022. – Т. 2. – №. 1.
9. Шарипов Хуршид Фазлиддинович, & Шарипова Садокат Фазлиддиновна. (2022). РЕАЛИЗАЦИЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ЭЙЛЕРА В ПЛАНИМЕТРИИ И ЕЕ АНАЛОГ. *International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research*, *1*(2), 373–377. Retrieved from https://journal.jbnuu.uz/index.php/ijcstr/article/view/207
10. Fazliddinovich S. X., Fazliddinova S. S. MATEMATIKA DARSLARIDA VIZUALIZATSIYALASHTIRISH USULLARIDAN FOYDALANISH //International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research. – 2022. – С. 289-292.
11. Шарипова, С. Ф., and А. Олтмишев. "СОВРЕМЕННЫЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ." (2022): 178-182.
12. Xolmanova, K. (2023). MAKSIMUMLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN YARIM O'QDA BOSHLANG'ICH MASALA. *Talqin Va Tadqiqotlar*, *1*(21). извлечено от http://talqinvatadqiqotlar.uz/index.php/tvt/article/view/382