ISSN 2181-3187

QOLDIQLAR YORDAMIDA BA'ZI INTEGRALLARNI HISOBLASH

Kalbaev Sultanbek Nazerbaevich - *stajer o'qituvchi*
Matimova Xurliman Aleuatdinovna - stajer o'qituvchi
Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar integralini hisoblash haqiyqiy o'zgaruvchili funksiyaning integralini hisoblashdan anchagina murakkab va qiziqarli, va buning ko'pgina usullari bisyor, ammo integrallarni hisoblashda qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremalaridan foydalanib yechish bizga birmuncha yengilliklar beradi va quyidagi misollarni qarab o'tamiz.

1-misol. Integralni hisoblang $\int\limits_{|z|=1} ztg\pi z dz$.

Yechilishi: $f(z) = ztg\pi z$ funksiya $|z|<1$ doirada $z=\frac{1}{2}; z=-\frac{1}{2}$ nuqatalaridan boshqa barcha sohasida analitik funksiyadir. Bizga ma'lumki, bu nuqtalar funksiyaning oddiy polyuslari bo'lganligi sababli quyidagilarni topamiz:

1) $$resf\left(\frac{1}{2}\right) = \left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{\sin\pi z}{-\pi\sin\pi z}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}$$

2) $$resf\left(-\frac{1}{2}\right) = \left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \left.\frac{\sin\pi z}{-\pi\sin\pi z}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}$$

Qoldiqlar haqida asosiy teoremaga muvofiq

$$\int\limits_{|z|=1} ztg\pi dz = 2\pi i\left(resf\left(\frac{1}{2}\right) + resf\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\pi i\left(-\frac{2}{\pi}\right) = -4i.$$

2-misol. Integralni hisoblang $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+z^2+1}$.

Yechilishi: $f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ funksiya $|z-i|<1$ doirada bitta maxsus nuqtaga ega: $z=i$ - ikkinchi tartibli polyus.

$z=i$ nuqtaga nisbatan qoldiqni hisoblaymiz:

$$resf(i) = \lim_{z\to i}\frac{d\left[(z^2+1)^2 f(z)\right]}{dz} = \lim_{z\to i}\frac{d(e^z)}{dz} = e^i.$$

Bundan qoldiqlar haqida asosiy teoremaga asosan quyidagini topamiz:

ISSN 2181-3187

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+z^2+1} = 2\pi i e^i .$$

3-misol. Integralni hisoblang $\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$.

Yechilishi: $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$ funksiya $|z|<1$ doirada $z=0$ maxsus nuqaga ega. Maxsus nuqtaning xarakterini aniqlash uchun $f(z)$ funksiyani $z=0$ nuqtaning atrofiida Loraan qatoriga yoyamiz:

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \ldots$$

Shunday qilib, Loran qatori cheksiz ko‘p manfiy darajali a`zolarga ega. Shuning uchun, $z=0$ nuqtasi yagona maxsus nuqta

$$resf(0) = C_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Integrallni hisoblash uchun asosiy qoldiqlar teoremasini qo‘llaymiz:

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i \cdot resf(0) = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

Adabiyotlar

1. S.Sirojiddinov.,SH.Maxsudov.,M.Saloxiddinov.«Kompleks o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi» Toshkent "O‘qituvchi" 1979 y.
2. В.Т.Дубровин «Теория функций комплексного переменного. Теория и практика». Казанский государственный унииверситет-2010
3. Ю.В.Сидоров,М.В.Федорюк,М.И.Шабунин. «Лекции по теории функций комплексного переменного». Москва «Наука». 1982 г.
4. И.И.Привалов. «Введение в теории функции комплексного переменного» Москва. «Наука». 1984 г