ISSN 2181-3187

IKKINCHI TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING KLASSIFIKATSIYASI VA KANONIK KO'RINISHI

CLASSIFICATION AND CANONICAL REPRESENTATION OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

КЛАССИФИКАЦИЯ И КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Shakayeva Elvira Erkin qizi
Termiz Davlat Universiteti magistranti
shakayevae@gmail.com,+998912392939

Annotatsiya: Ushbu maqolada ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial teng-lamalarning klassifikatsiyasi o'rganilgan. Differensial tenglamalarning tiplari va kanonik ko'rinishga keltirish haqida bayon qilingan. Va bunga doir masala yechilgan.

Kalit so'zlar: differensial tenglama, yechim, klassifikatsiya, xarakteristika, kanonik tenglama, kvadratik forma.

Abstract: In this article, the classification of second-order partial differential equations is studied. The types of differential equations and their canonical representation are described. And the issue is resolved.

Key words: differential equation, solution, classification, characteristic, canonical equation, quadratic form.

Аннотация: В данной статье изучается классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Описаны типы дифференциальных уравнений и их каноническое представление. И проблема решена.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, решение, классификация, характеристика, каноническое уравнение, квадратичная форма.

χ orqali Dekart ortogonal koordinatalarini $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bunda $n \geq 2$ bo'lgan x nuqtalarning $n-$ o'lchovli E^n Evklid fazosidagi sohani belgilaymiz. Ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deb noma'lum funksiya va uning ikkinchi tartibgacha xususiy hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi munosabatga aytiladi. Va bunda ikkinchi tartibli hosila ishtirok etishi shart. Bu tenglamani umumiy ko'rinishini quyidagicha yoziladi.

$$F\ (x, y, u, u_x\ u_y, u_{xx}, u_{\ xy}, u_{yy}) = 0 \tag{1}$$

ISSN 2181-3187

Oddiy differensial tenglamalardagidek xususiy hosilali differensial tenglamalar ham cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Bu yechimlarni umumiy yechimlar deb ataymiz. Qo'yiladigan qo'shimcha shartlar biz qarayotgan tenglama aniqlangan sohaning odatda chegarasida beriladi. Misol uchun, qo'shimcha shart sifatida bosh-lang'ich vaqt $t = 0$ da berilishi mumkin. Bunday shartga biz boshlang'ich shart deymiz. Agarda qo'shimcha shartlar sohaning chegarasida berilsa, bunday masalaga chegaraviy masala deyiladi. Chegaraviy shartlar berilmasdan faqatgina boshlang'ich shart berilgan bo'lsa, ushbu masalaga xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi deyiladi. Bu masala cheksiz sohada qaraladi. Masalada bir vaqtning o'zida ham boshlang'ich, ham chegaraviy shartlar qatnashsa, u holda masalaga aralash masalalar deyiladi. Agar $u(x) = u\,(x_1, x_2, x_3, \dots .x_n)$, funksiya biror D sohada aniqlangan, uzluksiz va tenglamada qatnashgan uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, shu sohada tenglamani qanoatlantirsa, u holda bu funksiya tenglamaning yechimi deb ataladi. Q sohada aniqlangan $u(x)$ funksiya xususiy xosilali differensial tenglamada ishtirok etuvchi barcha hosilalari bilan uzluksiz bo'lib, uni ayniyatga aylantirsa, $u(x)$ funksiyaga yuqoridagi tenglamaning klassik yechimi deyiladi. Xususiy differensial tenglamalarni yechish uchun juda ko'p xollarda tenglama kanonik ko'rinishga keltiriladi.Quyida biz n ta erkli o'zgaruvchili $u(x\,, x_1, \dots\,, x_n\,)$ funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli differensial tenglamani kanonik ko'rinishga keltirishni ko'rib chiqamiz. Tenglamaning umumiy ko'rinishini keltiramiz:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + \\ +c(x,y)u + f(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Bu tenglamada o'zgruvchilarni o'zaro bir qiymatli

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad (3)$$
$$\eta = \psi(\,x,y)$$

almashtirish kiritamiz.

Almashtirish yordamida differensial tenglamaga ekvivalent tenglamani hosil qilamiz. Ushbu yangi o'zgaruvchilarda (3) tenglamada ishtirok etayotgan xususiy hosilalarni hisoblaymiz.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}{\xi_x}^2 + 2\,u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}{\eta_x}^2 + u_\xi \xi_{x\,x} + u_\eta \eta_{xx} \qquad (4)$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\,\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{x\,y} + u_\eta \eta_{xy}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}{\xi_y}^2 + 2\,u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}{\eta_y}^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

(4) dagi olingan natijalarni (2) tenglamaga olib borib qo'yadigan bo'lsak va bir xil xususiy hosilalarni soddalashtirsak, (2) tenglamaga ekvivalent bo'lgan ξ va η

ISSN 2181-3187

o'zgaruvchili xususiy hosilali differensial tenglamaga kelamiz. Demak o'zaro bir qiymatli akslantirishlar natijasida xususiy hosilali chiziqli differensial tenglama yana chiziqli differensial tenglamaga o'tar ekan. 2-tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaning aralash ikkinchi tartibli xususiy hosilalari u_{xy} qatnashmagan bu sodda ko'rinishi odatda uning kanonik shakli deb yuritiladi. Kanonik shaklini birinchi tartibli xususiy hosilali differensial teng-lamaning yechimga ega bo'lish masalasi (2) differendial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deb ataluvchi

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}\,dxdy + a_{22}\,dx^2 = 0 \qquad (3)$$

oddiy differensial tenglamaning umumiy integrali bilan o'zaro chambarchas bog'liq bo'ladi. Tenglamaning umumiy integrallariga odatda (2) differensial tenglamaning xarakteristik chiziqlari deb yuritiladi.

1) Agar berilgan (x_0, y_0) nuqtada $a_{12}{}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)\, a_{22}(x_0, y_0) > 0$ bo'lsa (1.56) tenglama bu nuqtada giperbolik tipli deyiladi.

2)Agar berilgan (x_0,y_0) nuqtada $\Delta = a_{12}{}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)\, a_{22}(x_0, y_0) = 0$

bo'lsa (1.56) tenglama bu nuqtada parabolik tipli deyiladi.

3)Agar berilgan (x_0,y_0) nuqtada $\Delta = a_{12}{}^2(x_0, y_0) - a_{11}(x_0, y_0)\, a_{22}(x_0, y_0) < 0$ bo'lsa (1.56) tenglama bu nuqtada elliptik tipli deyiladi.

(2) tenglamaning barcha giperbolik tipli bo'ladigan nuqtalari to'plami shu tenglamaning giperboliklik to'plami, parabolik tipli nuqtalari to'plami parabolik sohasi va elliptik tipli bo'ladigan nuqtalari to'plami uning elliptiklik sohasi deyiladi. Agar (2) tenglama ko'rilayotgan soha nuqtalarida bir nechta tipga ega bo'lsa, bu sohada tenglama aralash tipli deyiladi. Endi (2) tenglama faqat bir tipga ega bo'ladigan biror D to'plamni qaraymiz. Xarakteristika tenglamasining yechimiga asosan bu sohaning har bir nuqtasidan (1.2) tenglamaning ikkita xarakteristik chizig'i o'tadi. Shunga ko'ra, (2) tenglama D sohada giperbolik tipli bo'lganda ikkala turli haqiqiy qiymatli, parabolik holda ustma-ust tushuvchi haqiqiy qiymatli va elliptik bo'lganda esa ikkita qo'shma kompleks qiymatli xarakteristik chiziqlar hosil bo'ladi. (2) tenglamaning kanonik shaklini topish uchun bu hollarni alohida-alohida qarab chiqamiz.

1) D sohada (2) giperbolik tipli bo'lsin, ya'ni uning barcha nuqtalarida $\Delta = a_{12}{}^2 - a_{11}\, a_{22} > 0$ tengsizlik o'rinli. Bu holda (3) ning yechimlarining har ikkala tenglamasi haqiqiy qiymatli

$$\varphi(x, y) = C_1 \quad \text{va} \quad \psi(x, y) = C_2$$

umumiy integrallarga ega bo'ladi. Mavzu boshida aytilgan yangi o'zgaruvchilarni kabi $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ almashtiramiz.

1-misol: Quyidagi tenglamani tipini aniqlang.

ISSN 2181-3187

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$$

Yechish: Berilgan tenglamaga mos kvadratik forma tuzamiz.

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)^2 + {\lambda_3}^2$$

$$\xi_1 = \lambda_1 - \lambda_2,$$

$$\xi_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3$$

$$\xi_3 = \lambda_3$$

Deb belgilasak, $Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ kvadratik forma mos ravishda

$$Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = {\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + {\xi_3}^2$$

kanonik ko'rinishga keladi.

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

Bundan ko'rinadiki tenglama elliptik tipga tegishli.

2-misol: Quyidagi tenglamani tipi o'zgarmaydigan sohada kanonik ko'rinishga keltiring.

$$v_{xx} + v_{xy} - 2v_{yy} - 3v_x - 15v_y + 27x = 0$$

Yechish: ${a_{12}}^2 - a_{11}\, a_{22} = 0.5^2 + 2 = 2.25 > 0$ berilgan tenglama giperbolik tipga tegishli. Berilgan tenglamaga mos ravishda xarakteristik tenglamani tuzamiz.

$$dy^2 - dxdy - 2dx^2 = 0$$

$$(dy + dx)(dy - 2dx) = 0$$

$$dy + dx = 0$$

$$dy - 2dx = 0$$

Bundan tenglamaning xarakteristikalarini topadigan bo'lsak,

$$y + x = c_1, \quad y - 2x = c_2$$

Yangi ξ va η o'zgaruvchilarni kiritsak va kerakli hosilalarni hisoblasak quyidagi natijaga kelamiz.

$$\xi = y + x; \qquad \eta = y - 2x$$

$$v_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi - 2\,u_\eta$$

$$v_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$$

$$v_{xx} = u_{\xi\xi} {\xi_x}^2 + 2\,u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} {\eta_x}^2 + u_\xi \xi_{x\,x} + u_\eta = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4\,u_{\eta\eta};$$

$$v_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x\, \xi_y + u_{\xi\eta} [\![(\xi]\!]_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{x\,y} + u_\eta \eta_{xy} =$$

$$= u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta}$$

$$v_{yy} = u_{\xi\xi} {\xi_y}^2 + 2\,u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} {\eta_y}^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = u_{\xi\xi} + 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

ξ va η o'zgaruvchilarga ko'ra x ni topamiz: $x = \frac{\xi - \eta}{3}$. Olingan natijalarni tenglama-ga qo'ysak,

$$u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4\,u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta} - 2u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta} - 3u_\xi + 6u_\eta - -15u_\xi - 15u_\eta + 9(\xi - \eta) = 0$$

ISSN 2181-3187

$$-9u_{\xi\eta} - 9u_{\xi} - 18\,\eta \;= 0$$

$u_{\xi\eta} \;+\; u_{\xi} \;+ 2\,\eta \;= 0$ kanonik ko'rinishiga ega bo'lamiz. Zarur xollarda kanonik ko'rinishdan keyin ham soddalashtirishlar bajariladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Durdiyev.D.Q, Merajova. SH.B, Jumoyev.B.E. Xususiy hosilali differensial tenglamalardan misol va masalalar to'plami.O'quv qo'llanma. -Toshkent:2020.
2. Oppoqov.Y.P, Turgunov.N, Gafurov.I.A. Oddiy differensial tenglamalardan misol va masalalar to'plami. -Toshkent: "Voris-nashriyot",2009.
3. Salohiddinov.M.S. Matematik Fizika tenglamalari .-Toshkent: "O'zbekiston", 2002.
4. Salohiddinov.M.S, Islomov.B.I . Matematik Fizika tenglamalari fanidan masalalar to'plami. -Toshkent:"Mumtoz so'z", 2010.
5. Soatov.Y.U. Oliy Matematika. -Toshkent:"O'qituvchi",1998.