

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ В ИРРИГАЦИОННЫХ КАНАЛАХ

*Патиев Фахриддин Мирзаевич*

*Чирчикское высшее командно-инженерное училище, кафедра  
Естественно-научных дисциплин, старший преподаватель*

**Абстракт:** В статье приводится численная реализация метода конечных элементов, основанная на разностной аппроксимации по временной переменной и схемы Галеркина-Петрова по пространственной переменной для моделирования двумерного неустановившегося движения воды в открытых руслах. Использование метода конечных элементов позволяет достаточно просто учесть сложность области определения пространственной переменной, аппроксимируя их простыми конечными элементами (треугольниками и четырехугольниками), а также обеспечивает задание граничных условий. Приведены результаты моделирования на примере участка канала, русла реки и фигурного отстойника.

### **Введение**

Процессы, протекающие в открытых руслах, происходят в многомерной пространственной и временной области, и описываются сложными системами квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. К особенностям открытых русел относятся их сложные формы, имеющие изгибы, рукава и наличие в них различных берегозащитных, перегораживающих и водозаборных сооружений различной конструкции и компоновки. Сложность происходящих в них процессов не позволяет в настоящее время исследователям оперативно оценить качественные и количественные параметры водного потока в русле реки, каналов и гидротехнических сооружений на них для реализации необходимого режима управления водными ресурсами. Поэтому разработка численных методов моделирования двумерного неустановившегося движения воды в открытых руслах имеет большое значение как для науки и, так и для практики.

Рассмотренный в статье метод моделирования двумерного неустановившегося движения воды в открытых руслах позволяет учесть особенности участков каналов, русел рек, гидротехнических сооружений на них, использование которых при проектировании позволяет оперативно на компьютерной модели объекта оценить их качественные и количественные показатели.

В связи с широким развитием численных методов решения сложных математических задач при помощи современных компьютерных технологий появилась реальная возможность получать конкретные качественные и

количественные характеристики различных сложных динамических процессов. В данной работе, при моделировании неустановившегося движения водного потока в водохозяйственных объектах, учитывается двумерное течение потока в пространстве, обеспечивающее улучшение качественных и количественных характеристик объектов, а также выбор наилучших их параметров объектов для проектирования и эксплуатации.

Методы и результаты.

Двумерное уравнение Сен-Венана, описывающее неустановившееся течения воды в открытых руслах [1,2], в векторно-матричной форме имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{D} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

где  $\mathbf{U} = \{h, p, q\}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p^2}{h^2} + gh & \frac{2p}{h} & 0 \\ -\frac{pq}{h^2} & \frac{q}{h} & \frac{p}{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{pq}{h} & \frac{q}{h} & \frac{p}{h} \\ -\frac{q^2}{h^2} + gh & 0 & \frac{2q}{h} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} i \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{p(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} \\ gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{q(p^2 + q^2)^{1/2}}{h^{7/3}} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $x$  – координата оси по длине;  $y$  – координата оси по ширине;  $t$  – время;  $h = h(x, y, t)$  – глубина водного потока;  $p = uh = p(x, y, t)$  – продольная составляющая расхода водного потока;  $q = vh = q(x, y, t)$  – поперечная составляющая расхода водного потока;  $u = u(x, y, t)$  – продольная составляющая скорости воды водного потока;  $v = v(x, y, t)$  – поперечная составляющая скорости водного потока;  $\partial z_0 / \partial x$  – уклон дна по оси  $x$ ,  $\partial z_0 / \partial y$  – уклон дна по оси  $y$ ,  $n$  – коэффициент шероховатости,  $g$  – ускорение силы тяжести;  $i(x, y, t)$  – интенсивность поступления воды.

Для однозначности решения данного уравнения необходимо задать начальные и граничные условия. Начальные условия характеризуют движение потока воды в какой-то момент времени  $t_0$ , принимаемой за начальное движение.

$$\mathbf{U}(x, y, t_0) = \mathbf{U}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

где  $\mathbf{U}_0(x, y)$  – заданные функции распределения глубины и расходов потока воды,  $\Omega$  – двумерная область определения переменных.

Будем считать границу  $d\Omega$  области  $\Omega$ , состоящей из жидких и непроницаемых твердых частей, т.е.  $d\Omega = \{d\Omega_{\text{ж}}, d\Omega_{\text{т}}\}$ , причем эти части границы могут состоять из нескольких отрезков.

Граничные условия для жидкой части задаются как изменение глубины или расхода воды

$$h_i(x, y, t) = H_i(t), \quad q_i(x, y, t) \cos \alpha + p_i(x, y, t) \sin \alpha = Q_i(t),$$
$$\alpha = (n, \hat{Ox}), \quad (x, y) \in d\Omega_{\text{ж}i}, \quad i = 1, n_{\text{ж}},$$
(3)

где  $q_i(x, y, t)$  и  $p_i(x, y, t)$  неизвестные продольные и поперечные составляющие расходы потока воды,  $H_i(t)$  и  $Q_i(t)$  - заданные функции изменения глубины и расходов потока воды на соответствующей жидкой части,  $\alpha$  - угол между нормалью к границе и осью  $x$ .

На твердой части границы задается в виде

$$q_i(x, y, t) \cos \alpha + p_i(x, y, t) \sin \alpha = 0, \quad \alpha = (n, \hat{Ox}), \quad (x, y) \in d\Omega_{\text{т}i} \quad i = 1, n_{\text{т}}.$$
(4)

Физический смысл (4) означает, что суммарные составляющее продольных и поперечных расходов воды по нормали к границе будут равным нулю.

В последние годы с развитием теории аппроксимации, сплайнов и методов Галеркина [3,4] для моделирования двумерных объектов со сложными областями определения пространственной переменной широко начали пользоваться методами конечных элементов.

Производя разностную аппроксимацию уравнения (1) по времени, линеаризуя коэффициенты уравнения методом квазилинеаризации и учитывая непрерывность параметров потока воды, после несложных преобразований получим уравнение

$$\mathbf{E}^k \frac{\partial \mathbf{U}^{k+1}}{\partial x} + \mathbf{F}^k \frac{\partial \mathbf{U}^{k+1}}{\partial y} + \mathbf{G}^k \mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{R}^k, \quad k=1, 2, 3, \dots$$
(5)

где матрицы  $\mathbf{E}^k$ ,  $\mathbf{F}^k$ ,  $\mathbf{G}^k$  и  $\mathbf{R}^k$  определяются следующим образом [3,4]

$$\mathbf{E}^k = \mathbf{A}^k + (\mathbf{A}_U^k - \mathbf{U}^k) + \frac{1}{2} \mathbf{A}_U^k \mathbf{U}^k, \quad \mathbf{F}^k = \mathbf{B}^k + (\mathbf{B}_U^k - \mathbf{U}^k) + \frac{1}{2} \mathbf{B}_U^k \mathbf{U}^k,$$
$$\mathbf{G}^k = \frac{1}{2} \mathbf{A}_U^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial x} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_U^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial y} + \mathbf{D}_U^k + \frac{1}{\tau}, \quad \mathbf{R}^k = \left( \mathbf{D}_U^k + \frac{1}{\tau} \right) \mathbf{U}^k - \mathbf{D}^k$$
(6)

$$\text{Здесь } \mathbf{A}_U^k = \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}} \right)_k, \quad \mathbf{B}_U^k = \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}} \right)_k, \quad \mathbf{D}_U^k = \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{U}} \right)_k.$$

Таким образом, мы получили на каждом шаге уравнение для неизвестных векторов  $\mathbf{U}^{k+1}$  на основе данных предыдущего шага. Начальные и граничные условия тоже дискретизируются по времени.

Для численного решения уравнения (5) с краевыми условиями (2)-(4) используем метод конечного элемента, использующий схему Галеркина-Петрова. Область определения  $\Omega$  переменных разбивается на  $N$  конечные подобласти  $\Omega_i$  ( $i$

– 1, 2, ..., N так, чтобы  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ ,  $\Omega_i \cap \Omega_j = 0$ , при  $i \neq j$ . Выбираем базисы  $\{\varphi_i(x, y)\}$  и  $\{\psi_i(x, y)\}$

- для подобластей  $\Omega_i$ . (подобласти представляют собой треугольники и четырехугольники, имеющие площади примерно одинакового порядка). Причем базис  $\psi_i(x, y)$  является характеристической функцией области  $\Omega_i$ .

Приближенное решение  $U^{k+1}(x, y)$  ищется в виде

$$U_{N_i}^{k+1}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_i} Q_i \varphi_i(x, y), \quad (7)$$

где  $Q_i$  – вектор-матрица неизвестных коэффициентов и количество функции в аппроксимациях элементов области определения переменных и  $\varphi_i(x, y)$  – линейные или квадратичные базисные функции на треугольнике и четырехугольнике [5,6,7].

Для определения коэффициентов  $Q_i$  во внутренних точках области определения переменных используется система уравнений

$$\sum_{i=1}^{N_i} Q_i \int_{\Omega_j} \left( E^k \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} + F^k \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} + G^k \varphi_i(x, y) - R^k \right) dx dy = 0, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

Далее по заданным краевым условиям (2) – (4) составляются дополнительные уравнения для неизвестных граничных точек с учетом базисных функций. Вычисляя интегралы на элементах в (8) и с граничными условиями получаем систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных  $Q_i$ . Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, получим коэффициенты  $Q_i$  для всех узлов сетки, далее по формуле (7) получим решение дифференциального уравнения (1) с краевыми условиями (2)-(4). Далее вычисление циклически повторяются для последующих шагов по времени. Устойчивость, точность и сходимость рассмотренной схемы обеспечиваются выбором схемы аппроксимации пространственной области конечными элементами и шагом времени [3,4].

Результаты моделирования двумерного водного потока с использованием выше указанного метода проиллюстрируем на примере участка канала, русла реки и фигурного отстойника.

Данные dna участка русло канала и реки задаются по узлам разбитой сетки области в виде таблицы с полями  $\{i, x, y, z\}$ , где  $i$  – номер узла,  $x$  – координата по оси  $x$ ,  $y$  – координата по оси  $y$ ,  $z$  – координата по оси  $z$ . Элементы области и способы аппроксимации задаются в виде таблицы с полями  $\{k, i_1, i_2, i_3, i_4, apr\}$ , где  $k$  – номер элемента,  $i_1$  – первый узел элемента,  $i_2$  – второй узел элемента,  $i_3$  – третий узел элемента,  $i_4$  – четвертый узел элемента,  $apr$  – способ аппроксимации при выборе базисов элемента. Граничные условия задаются с помощью таблицы с полями  $\{k, i_1, i_2, i_3, i_4, \dots\}$ , где  $k$  – номер границы,  $i_1$  –

первый узел границы,  $i_2$  – второй узел границы,  $i_3$  – третий узел границы,  $i_4$  – четвертый узел границы и др[8,9].

Нами были промоделированы на компьютере двумерное неустановившееся движение воды для следующих случаев.

Пример 1. Прямоугольный участок русла канала с сужением с помощью стенок с двух сторон.

Параметры прямоугольного участка русла канала по ширине 2700,0 м, а по длине 7600,0 м. Русло разбито на 261 четырехугольных элементов, примерная площадь каждого четырехугольника равна 77000 – 78000 м<sup>2</sup>, в середине участка имеется сужение с помощью твердых тонких стенок (рис.1 а). Длина стенки составляет три ширины прямоугольного элемента, ширина стенки равна одну треть длины элемента.

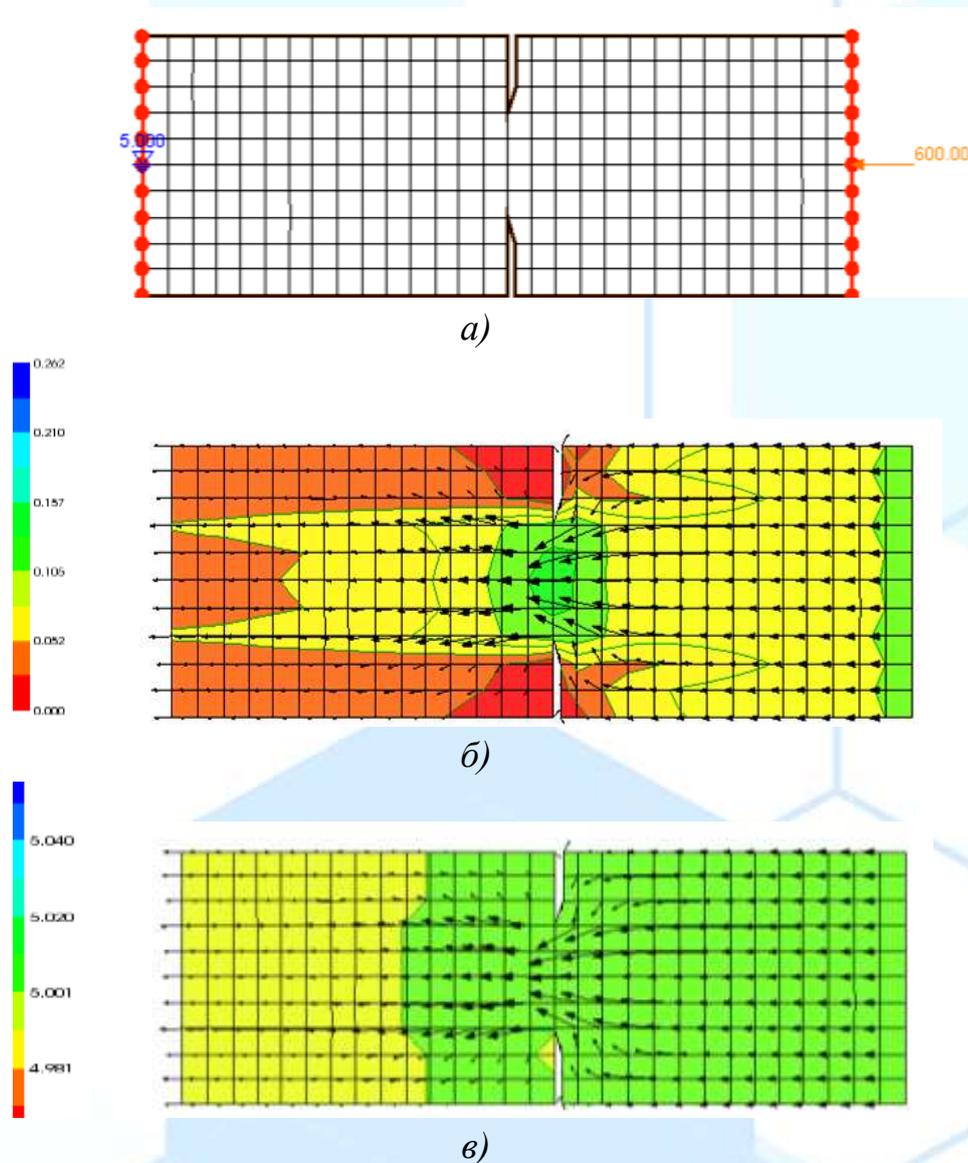
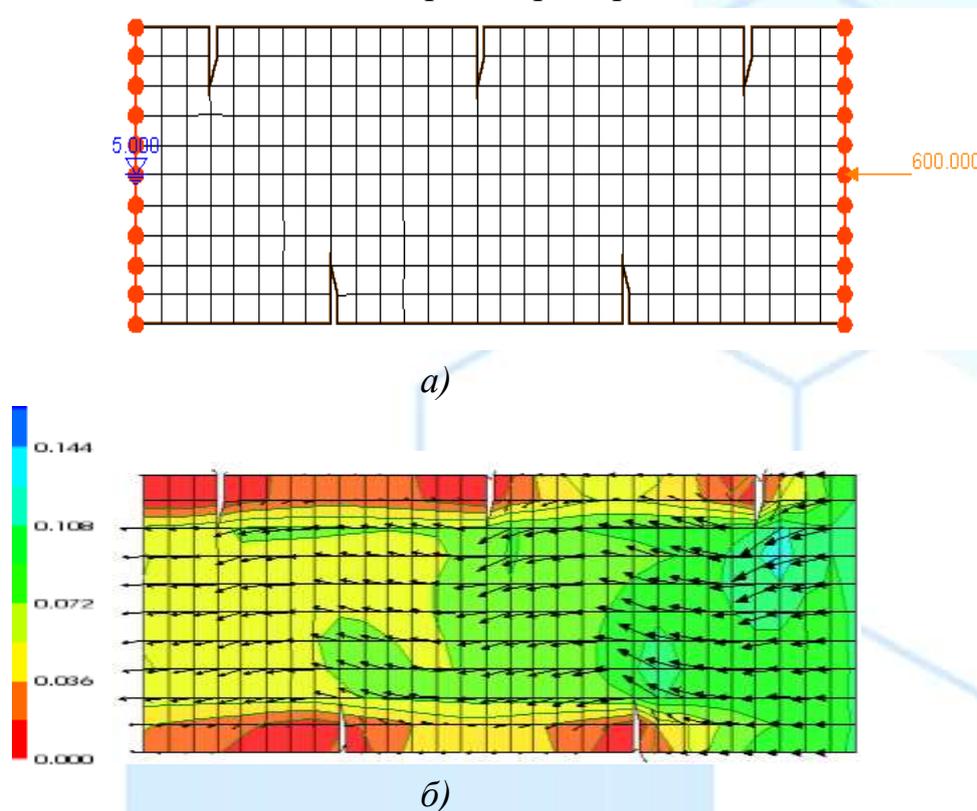
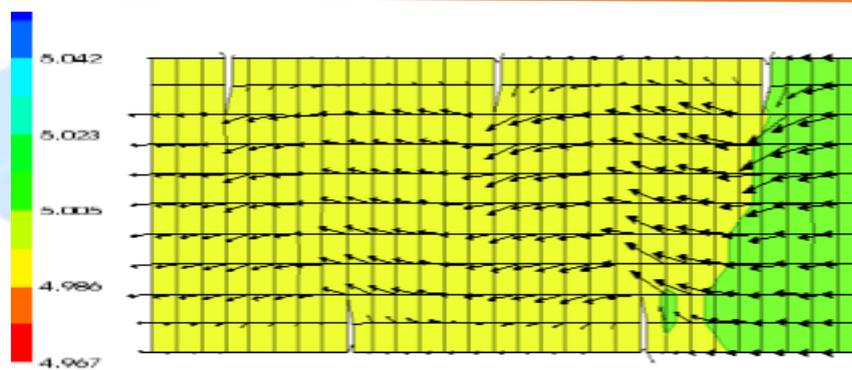


Рис.1. Прямоугольный участок русла канала с сужением

Начальные условия по всему руслу приняты такие, что расход воды равен нулю и глубина 5,0 м, то есть в русле стоячая вода. На верхних и нижних границах приняты условия равенства нулю расхода воды по нормали. В качестве граничных условий в правой стороне прямоугольника приняты жидкая граница с постоянным расходом воды равным  $600 \text{ м}^3/\text{с}$ , а в левой части участка выбран постоянный горизонт воды равный 5,0 м. С момента начала численного эксперимента вода с правой границы равномерно начала поступать расходом воды  $600 \text{ м}^3/\text{с}$  и начались изменения параметров водного потока. На рис.1 б и в показаны эпюры скоростей, свободной поверхности потока и направление скоростей водного потока через 10 часов после начала процесса. В левой части рисунка (рис.1 б) приведены шкалы скоростей и свободной поверхности. Из рис. 1 б видно, что максимальные скорости потока имеются в отверстии вблизи стенок. Из полей свободных поверхностей потока (рис. 1 в) видны значения подпора от стенки сужения.

Пример 2. Прямоугольный участок русла реки (рис.2 а) с последовательно расположенными шпорами. Параметры прямоугольного русла, начальные и граничные условия аналогичны как в первом примере.





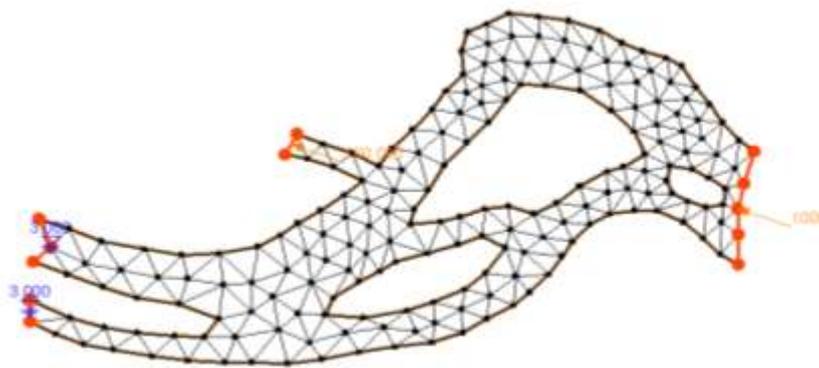
в)

Рис.2. Прямоугольный участок русла реки со шпорами с двух сторон

Начальные условия по всему руслу приняты такие, что расход воды равен нулю и глубина 5,0 м, то есть в русле стоячая вода. На рис. 2 б и в показаны эпюры скоростей, свободной поверхности потока и направление скоростей водного потока через 10 часов после начала процесса. В левой части рисунков (рис.2 б и в) приведены шкалы скоростей и свободной поверхности.

Пример 3. Русло реки со сложными геометрическими формами (рис.3 а). Участок русла реки разбит на треугольные элементы, которые удобны для аппроксимации сложных областей. Начальные условия по всему руслу приняты такие, что расход равен воды нулю и глубина 3,0 м. Здесь имеются четыре жидкие границы, в двух задаются изменения расхода воды 1000 и 160 м<sup>3</sup>/с, а в остальных двух задаются горизонты воды равным 3,0 м.

На рис.3 б и в показаны эпюры скоростей, свободной поверхности потока и направление скоростей водного потока через 15 часов после начала процесса. Из эпюры скоростей видны, те места, где имеются большие скорости, т.е. места смыва, а где меньшие скорости-места заиления.



а)

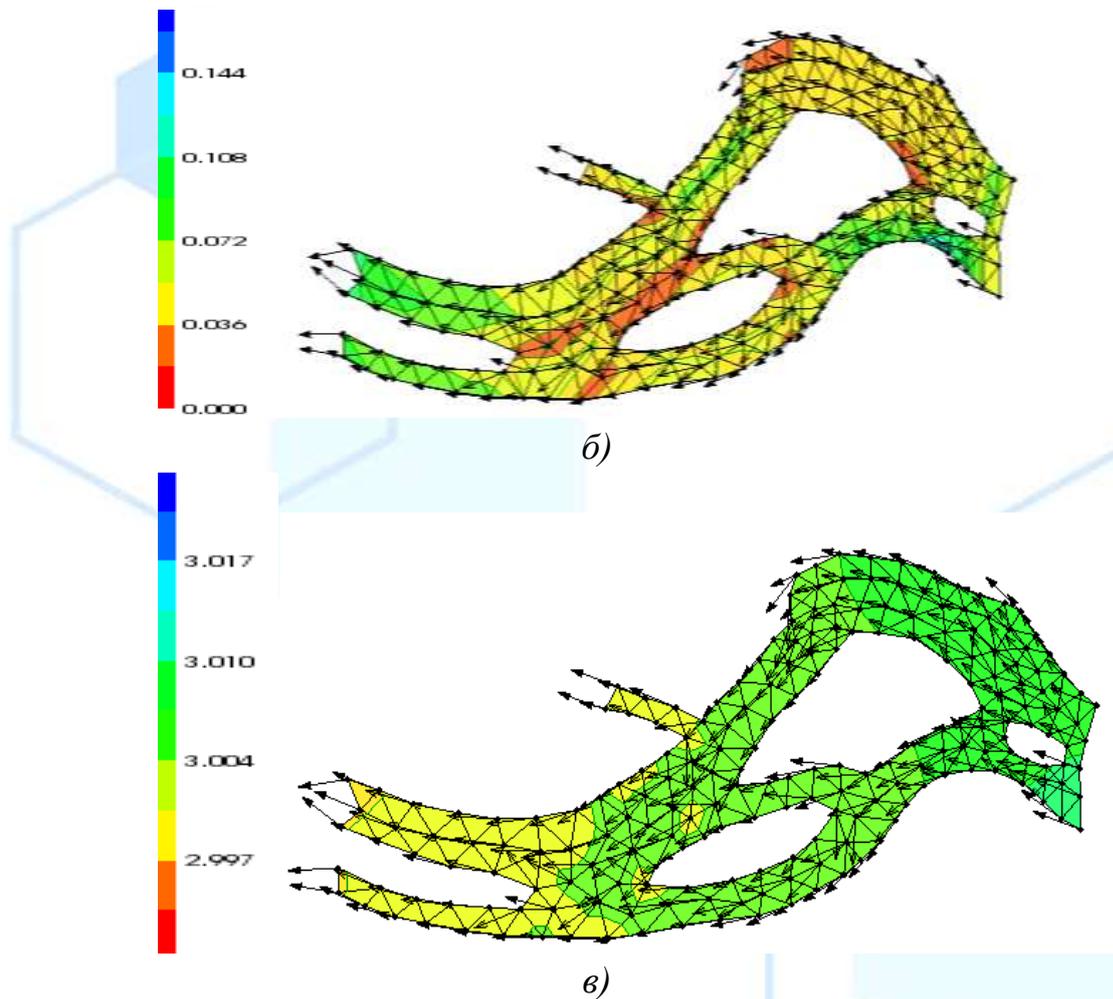
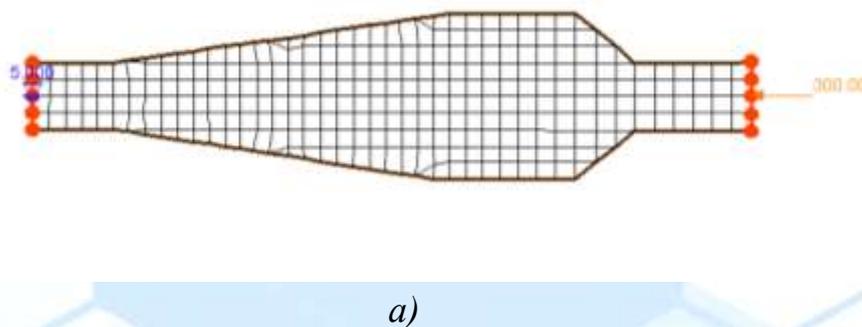


Рис.3. Русло реки со сложными геометрическими формами

Пример 4. Фигурный отстойник (рис. 4 а) в начале резко расширяющимся и в конце сужающимся сечениями. Участок русла реки разбит на треугольные и четырехугольные элементы, которые удобны для аппроксимации сложных областей.



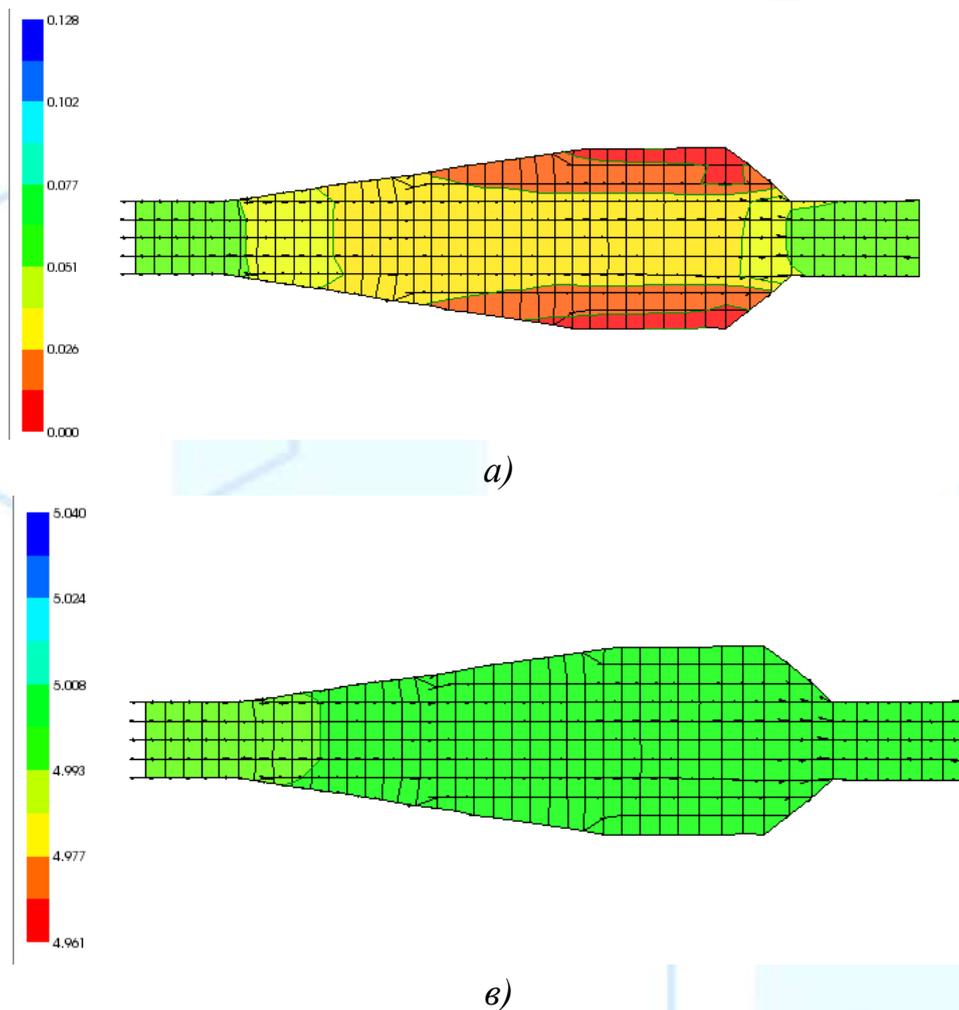


Рис.4. Фигурный отстойник

Начальные условия приняты по всему руслу такие, что расход воды равен нулю и глубина 5,0 м, то есть в отстойнике стоячая вода. Граничные условия в правом конце отстойника расход воды равный  $300 \text{ м}^3/\text{с}$ , а на левом конце постоянный горизонт воды равный 5,0 м (рис.4. а). На рис.4 б и в показаны эпюры скоростей и свободной поверхности потока водного потока через 10 часов после начала процесса. Из эпюры скоростей видно, что скорости уменьшаются с расширением ширины русло отстойника и самые низкие скорости будут в середине сужающейся части отстойника, что позволяет определить самые уязвимые места заиления отстойника.

### Заключение

Таким образом, использование метода конечных элементов для моделирования водного потока, учитывающего многомерность параметров водохозяйственных объектов в пространстве, дает возможность моделирования на компьютере динамики переходных процессов водных ресурсов и определения качественных и количественных характеристик потока воды по длине, ширине русла реки и участка канала, а также позволяет определить проектные параметры

новых сооружений в них и улучшить эксплуатационные параметры уже имеющихся гидротехнических сооружений, в каналах, русла рек и других водохозяйственных объектах.

### Литература

- [1] Rakhimov, S., Seytov, A., Nazarov, B., Buvabekov, B., Optimal control of unstable water movement in canals of irrigation systems under conditions of discontinuity of water delivery to consumers. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 883 (2020) 012065, Dagestan, 2020, IOP Publishing DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012065 (№5, Scopus, IF=4,652)
- [2] Shavkat Rakhimov, Aybek Seytov, Nasiba Rakhimova, Bahrom Xonimqulov. [Mathematical models of optimal distribution of water in main canals](#). [2020 IEEE 14th International Conference on Application of Information and Communication Technologies \(AICT\)](#), INSPEC Accession Number: 20413548, IEEE Access, Tashkent, Uzbekistan, DOI:[10.1109/AICT50176.2020.9368798](#) (AICT) pp. 1-4,(№ 5, Scopus, IF=3,557)
- [3] [Rakhimov, S.](#), [Seytov, A.](#), [Kudaybergenov, A.](#) Modeling and optimization of water supply processes at large pumping stations. [Global and Stochastic Analysis](#), 2021, 8(3), стр. 57–62.
- [4] Kabulov A.V., Seytov A.J., Kudaybergenov A.A. Optimal water distribution in large main canals of irrigation system // [Global and Stochastic Analysis](#). – 2021. Vol.8, No.3. Pp. 45-53. (№3 Scopus IF = 9.6246)
- [5] [Seytov, A.](#), [Turayev, R.](#), [Jumamuratov, D.](#), [Kudaybergenov, A.](#) Mathematical Models for Calculation of Limits in Water Resources Management in Irrigation Systems. International Conference on Information Science and Communications Technologies: Applications, Trends and Opportunities, ICISCT 2021, 2021
- [6] Shavkat Rakhimov, Aybek Seytov, Murod Sherbaev, et al. Algorithms for solving the problems of optimizing water resources management on a reservoir seasonal regulation. AIP Conference Proceedings 2432, 060023 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0090412>
- [7] Rakhimov S., Seytov A., Rakhimova N., Xonimqulov B. Mathematical models of optimal distribution of water in main channels // 4th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies, AICT 2020 - Proceedings, 2020, 9368798. (№ 3, Scopus, IF=3,557).
- [8] Ilkhomjon Makhmudov, Daniyar Jumamuratov, Aybek Seytov, Umidjon Sadiev, Uktam Jovliev, Jonibek Shonazarov, Oybek Muminov, Muzaffar Ruziev, Muxtorbek Yusupov. Mathematical Models Of Typical Elements Of Water Management Systems. Journal of Positive School Psychology <http://journalppw.com> 2022, Vol. 6, No. 6, 6871-6877.
- [9] Ilkhomjon Makhmudov, Rasul Turaev, Aybek Seytov, Navruz Muradov, Umidjon Sadiev, Uktam Jovliev, Dilbar Makhmudova, Muzaffar Ruziev, Mamatkobil Esonturdiyev. Optimal Management Of Water Resources Of Large Main Canals With Cascades Of Pumping Stations. Journal of Positive School Psychology <http://journalppw.com> 2022, Vol. 6, No. 6, 6878-6884.