ISSN 2181-3187

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ ТАКРИБИЙ ЕЧИШНИНГ ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР МЕТОДИ

Мусаева Ф.
“Маъмун университети” НТМ Иқтисод ва бухгалтерия кафедраси ўқитувчиси
Рустамова Дилноза
221- иқтисод гурух талабаси

Илмий ва тақбиций масалаларда кўпинча шундай оддий дифференциал тенгламалар учрайдики, уларнинг умумий ечими қвадратураларда ифодаланмайди. Ечими ошкор куринишда топиладиган дифференциал тенгламалар синфи нихоятда тор. Агарда оддий дифференциал тенгламанинг ечими қвадратураларда ифодаланмаса, у холда ечим такрибий топилади. Ечимни такрибий топиш методларидан бири даражали қаторлар методидир.

Оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи ва чегаравий масала куйилади. Коши масаласи чегаравий масалага нисбатан анча енгилдир. Шунинг учун хам айрим холларда чегаравий масала Коши масаласига келтириб ечилади.[1]

Муммонинг қўйилиши. Ушбу биринчи тартибли

$$\frac{du}{dx} = f(x,u) \tag{1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$u(x_0) = u_0 \tag{2}$$

дастлабки шартни қаноатлантирадиган ечимини топиш, Коши масаласи дейилади.

Айрим холларда биринчи ҳамда юкори тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ечиш учун ечимни Тейлор ёйилмаси куринишида тасвирлаб, бу ёйилманинг маълум микдордаги ҳадлари сакланади. Даражали қаторлар методи бошка методларни қўллаш учун ёрдамчи метод булиб, дастлабки қийматнинг унча катта булмаган атрофида қўлланилади. Ушбу

$$u^{(n)} = f(x,u,u',u'',\ldots,u^{(n-1)}) \tag{3}$$

n-тартибли оддий дифференциал тенгламанинг

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_0',\ u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)} \tag{4}$$

[1] М. ИСРОИЛОВ ХИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ 2-кисм ТО Ш К ЕН Т «IQTISOD-M OLIYA» 2008.

ISSN 2181-3187

дастлабки шартларни каноатлантирадиган ечимини x_0 нинг бирор атрофида топиш талаб килинсин. Фараз килайлик, $f(x,u,u',u'',...,u^{(n-1)})$ функция барча аргуменглари буйича $\left(x_{0,}u_0,u_0', ...,u_0^{(n-1)}\right)$дастлабки нуктада аналитик булсин, яъни у шу нуктанинг бирор атрофида даражали қаторга ёйилсин:

$$f(x,u,u',u'',...,u^{(n-1)}) =$$
$$\sum_{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n} C_{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n}(x-x_0)^{\alpha_0}(u-u_0)^{\alpha_1}...(u^{(n-1)}-u_0^{(n-1)})^{\alpha_n},$$

бу ерда $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n$ манфий булмаган бутун сонлар булиб, $C_{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n}$ ўзгармас коэффициентлар. У холда Коши-Ковалевская теоремасига кўра (3) тенгламанинг (4) шартларини каноатлантирадиган $u(x)$ ечими x_0 нуктада аналитик функция бўлади, шунинг учун хам уни Тейлор қатори ёрдамида ифодалаш мумкин:

$$u(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{u^{(p)}(x_0)}{p!}(x-x_0)^p \tag{5}$$

бу ерда $(x-x_0)^p$ (5) кдторнинг дастлабки n та $u(x_0)=u_0, u'(x_0)=u_0',\ u^{(n-1)}(x_0)=u_0^{(n-1)}$ коэффициентлари топилади. Энди (3) тенгликни мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра x га нисбатан дифференциаллаб,

$$u^{(n+1)}=\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial f_1}{\partial u^{(k)}}u^{(k+1)} \tag{6}$$

ни хосил қиламиз (бунда кулайлик учун $u^{(0)}=u$ деб олинди). Бу ерда $u^{(n)}$ ўрнига унинг қийматини (3) дан келтириб қўйиб, кўрамизки, $u^{(n+1)}$ микдор $x_{0,}u_0,u_0', ...,u_0^{(n-1)}$ ларнинг тўла аникданган функциясидир. Уни $f(x,u,u',u'',...,u^{(n-1)})$ деб белгилаймиз, у холда

$$u^{(n+1)}=f_1(x,u,u',u'',...,u^{(n-1)}) \tag{7}$$

Шунга ўхшаш (6) тенгликни x га нисбатан дифференциаллаб,

$$u^{(n+2)}=\frac{\partial f}{\partial x}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\partial f_1}{\partial u^{(k)}}u^{(k+1)} \tag{8}$$

ва $u^{(n)}$ нинг ўрнига унинг қийматини (3) дан келтириб қўйсак,

$$u^{(n+2)}=f_2(x,u,u',u'',...,u^{(n-1)}) \tag{9}$$

га эга буламиз. Бу жараённи давом эттириб, кўрамизки, ихтиёрий $n+k$ тартибли хосила $x,u,u', ...,u^{(n-1)}$ нинг тўла аникланган функцияси бўлади. Қулайлик учун $f_0=f$ деб олиб, (3), (8), (9) тенгликларда $x,u,u', ...,u^{(n-1)}$ лар ўрнида дастлабки қиймат $x_{0,}u_0,u_0', ...,u_0^{(n-1)}$ ларни кўйиб, қўйидагига эга буламиз:

$$u_0^{(n+k)}=u^{(n+k)}(x_0)=f_k(x,u,u',u'',...,u^{(n-1)}) \tag{10}$$

Энди (10) ни (5) га қўйсак,

$$u(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{u^{(p)}(x-x_0)}{p!}(x-x_0)^p+\sum_{p=n}^{\infty}\frac{f_p}{p!}(x-x_0)^p \tag{11}$$

ISSN 2181-3187

келиб чикади.[2]

Мисол. Ушбу

$$u'' - xu' + u^2 - 1 = 0 \tag{12}$$

тенгламанинг

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1 \tag{13}$$

дастлабки шартларни қаноатлантирадиган ечимининг даражали қатордаги ёйилмасининг бир неча хадлари топилсин. [3]

Олинган натижа: (12) тенгламани иккинчи хосиласига нисбатан ечамиз:

$$u'' - xu' + u^2 - 1 = 0$$

Бу тенгликнинг хар иккала томонини кетма-кет дифференциаллаймиз:

$$\left.\begin{aligned} u''' &= u' + xu'' - 2uu', \\ u^{IV} &= 2u'' + xu''' - 2(u')^2 - 2uu'', \\ u^{V} &= 3u''' + xu^{IV} - 6u'u'' - 2uu''', \\ u^{VI} &= 4u^{IV} + xu^{V} - 6(u'')^2 - 8u'u''' - 2uu^{IV} \end{aligned}\right\}$$

Энди (12) - (13) тенгликларда $u(0) = 0, u'(0) = 1$ қийматларни қўйсак,

$$u''(0) = 1, u''' = (0) = 1, u^{IV}(0) = 0, u^{V}(0) = -1, u^{VI}(0) = -10$$

келиб читали. Бу қийматларни (5) га қўйиб, қўйидагини хосил киламиз:

$$u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{360} + \dots .$$

Даражали қаторлар методи ёрдамида умумий ечими квадратураларда ифодаланмайдиган оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимини тақрибий хисоблашимиз мумкин ва ўзимизга керакли аникликда тора оламиз.

---

[2] М. ИСРОИЛОВ ХИСОБЛАШ МЕТОДЛАРИ 2-кисм ТО Ш К ЕН Т «IQTISOD-M OLIYA» 2008.

[3] WWW.Ziyouz.com.