ISSN 2181-3187

СОГЛАСОВАННЫЕ РЕЗУЛЬТАНТЫ ЭЛЕМЕНТА В ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ

Сатторов Мамадиёр Эгамбердиевич
Приподователь кафедры Высшая математика и физика Каршинский филиал Ташкенского университета информационных технологий
e-mail: sattorov_diyor@mail.ru

Аннотация: В работе методом сопряженной аппроксимации вычисляется согласованные результанты элемента в задаче о кручении стержня. Теория сопряженной аппроксимации будет проиллюстрировано на четырехэлементной модели.

Ключевые слова: сопряженная, аппроксимация, кручения, сечение, стержень, интерполяция, полином.

Annotatsiya: Ushbu ishda bog’langan approksimatsiya usuli sterjen buralishi masalasidagi elementning kelishilgan natijalarini hisoblab chiqadi.

Bog’langan approksimatsiya nazariyasi to’rt elementli modelda tasvirlanadi.

Kalit so’zlar: bog’lanish, approksimatsiya, buralish, kesim, sterjen, interpolyatsiya, polinom.

Annotation: In the work by the method of conjugate approximation the matched element results are computed in the problem of rod torsion.

The theory of conjugate approximation will be illustrated in four element model.

Key worlds: bound approximation, torsion, cut, stem, interpolation, polynomial.

Согласно теории кручения цилиндрических стержней с произвольной формой сечения, сдвиговые напряжения, возникающие в теле в результате действия крутящего момента T относительно оси z, могут быть вычислены в произвольной точке тела по формулам

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad (1)$$

где φ—функция напряжений. Дифференциальное уравнение для этой функции имеет вид

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2\theta = 0, \qquad (2)$$

а граничное условие записывается как

$$\varphi = 0. \qquad (3)$$

В уравнение (2.2) как параметры входят модуль сдвига материала G [Н/см^2] и крутка (угол закручивания на единицу длины) θ [рад/см]. При такой постановке задачи дифференциальное уравнение не содержит приложенного крутящего момента T [Н·см]. Величина T вычисляется после решения уравнения (2.2) по формуле

ISSN 2181-3187

$$T = 2\int_{\Sigma} \varphi dA. \qquad (4)$$

Функцию напряжений можно наглядно представить как некоторую поверхность, охватывающую поперечное сечение стержня. Крутящий момент пропорционален объему, охватываемому этой поверхностью, а сдвиговые напряжения связаны с углами наклона касательных к этой поверхности в плоскостях xz и yz.

Определение узловых значений - главный шаг в решении задачи. Однако в большинстве случаев бывает необходимо вычислять еще целый набор величин для каждого элемента. Такие величины называется результантами элемента.

В рассмотренной задаче, например, интересно знать такие результанты, как значения сдвиговых напряжений в каждом элементе и крутящего момента T, который вызывает закручивание стержня на угол θ.

Недостатком применения линейных интерполяционных полиномов является невозможность получить градиенты как функции x и y. Градиент и любая связанная с ним величина получаются постоянными внутри элемента. Чтобы иметь более приемлемые значения узловых величин применяются различные методы усреднения. Можно, например, в качестве значения градиента в данном узле принять среднюю по всем окружающим этот узел элементам величину. Узловые значения результантов элемента можно также получить с помощью теории сопряженной аппроксимации [2]. Эта теория дает значения результантов элемента, согласованные с аппроксимирующими полиномами для векторной или скалярной величины.

Теория сопряженной аппроксимации будет проиллюстрировано на четырехэлементной модели в задаче о кручении.

Узловые значения результантов элемента получаются решением системы уравнений

$$[C]\{\sigma\} = \{R\}, \qquad (5)$$

где [C] и {R} представляют собой сумму матриц элементов вида

$$\left[c^{(e)}\right] = \int_V \left[N^{(e)}\right]^T \left[N^{(e)}\right] dV \qquad (6)$$

$$\left[r^{(e)}\right] = \int_V \bar{\sigma}\left[N^{(e)}\right]^T dV, \qquad (7)$$

а $\bar{\sigma}$ — стандартный результант элемента. Определить $\left\{r^{(e)}\right\}$несложно, потому что величина $\bar{\sigma}$ постоянна внутри элемента. Легко вычислить [$c^{(e)}$], используя плоские L-координаты. Рассмотрим первый элемент подробнее. Имеем

$$\left[N^{(1)}\right] = [L_1 \quad L_2 \quad 0 \quad L_3 \quad 0 \quad 0].$$

Запишем произведение $\left[N^{(1)}\right]^T \left[N^{(1)}\right]$:

ISSN 2181-3187

$$\left[N^{(1)}\right]^T\left[N^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} L_1^2 & L_1L_2 & 0 & L_1L_3 & 0 & 0 \\ L_1L_2 & L_2^2 & 0 & L_2L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1L_3 & L_2L_3 & 0 & L_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Интегрируя по площади с использованием формулы интегрирование по L-координатам, получаем

$$\left[c^{(1)}\right]=\frac{A^{(1)}}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

(толщина элемента предполагается единичной).

Вектор-столбец для первого элемента имеет вид

$$\left\{r^{(1)}\right\}=\frac{A^{(1)}\bar{\sigma}}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=A^{(1)}\frac{(233)}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=A^{(1)}\begin{Bmatrix} 77{,}67 \\ 77{,}67 \\ 0 \\ 77{,}67 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (9)$$

В предыдущих расчетах использовалось сдвиговое напряжение τ_{zy} только потому, что оно имеет наибольшее значение внутри каждого элемента. Сдвиговое напряжение τ_{zx} может быть рассмотрено точно так же. Вектор-столбец {R} должен быть вновь вычислен с использованием числовых значений τ_{zx}. Заметим, что вектор-столбец {R} составляется только для величины, изменяющейся от элемента к элементу. Итак, числовые матрицы элементов с первого по четвертый даются формулами (8) - (12).

$$\left[c^{(2)}\right]=\frac{A^{(2)}}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left\{r^{(2)}\right\}=A^{(2)}\begin{Bmatrix} 0 \\ 213 \\ 213 \\ 0 \\ 213 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

$$\left[c^{(3)}\right]=\frac{A^{(3)}}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left\{r^{(3)}\right\}=A^{(3)}\begin{Bmatrix} 0 \\ 164{,}67 \\ 0 \\ 164{,}67 \\ 164{,}67 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad (11)$$

ISSN 2181-3187

$$
\left[c^{(4)}\right]=\frac{A^{(4)}}{12}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&1&1\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&1&1&2\end{bmatrix},\qquad \left\{r^{(4)}\right\}=A^{(4)}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\164,67\\164,67\\164,67\end{Bmatrix}. \qquad (12)
$$

Окончательная система уравнений получается суммированием уравнений для каждого элемента. В результате имеем

$$
\frac{1}{12}\begin{bmatrix}2&1&0&1&0&0\\1&6&1&2&2&0\\0&1&2&0&1&0\\1&2&0&6&2&1\\0&2&1&2&6&1\\0&0&0&1&1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}77,67\\455,35\\213\\407,01\\542,34\\164,67\end{Bmatrix}. \qquad (13)
$$

Так как все элементы имеют одинаковую площадь, то в последних формулах она опущена.

Узловые значения результанта следующие:

$\{\sigma\}^T$ =[70,9, 436,5, 724,1, 353,6, 671,4, 475,5].

Для результантов элемента можно, кроме того, получить соотношения, которые выражают изменение этих величин по площади элемента. Применение теории сопряженной аппроксимации сводится к решению системы алгебраических уравнений, порядок которой совпадает с порядком системы, используемой для получения узловых значений. Это представляет определенное неудобство при решении задач, которые требуют включения большого числа элементов.

Литература:

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Москва, Мир 1979.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва, Мир 1975.