ISSN 2181-3187

FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI TUSHUNCHASI

Solijonov Sardorbek
Andijon Davlat Pedagogika instituti, Aniq va tabiiy fanlar fakulteti
Matematika va Informatika yo'nalishi talabasi

Annotatsiya: Ushbu maqolada matematika fanida funksiya uzliksizliga haqida ilmiy fikrlar bayon etiladi ularni iloji boricha tinglovchilarga tushunarli tarzda bo'lishi uchun misollar tariqasida ham ko'rib o'tilgan.. Ilmiy fikrlar faktlarga asoslanib xulosalanadi.

Kalit so'zlar: Funksiya , nuqta ,kesishuvchi funksiyalar,to'plam limit, fazo ,matematika,

Funksiyaning uzluksizligi ta'riflari. Faraz qilaylik f (x) funksiya X ∈ R to'plamda berilgan bo'lib, x_0 ∈ X nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1- ta'rif. Agar

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

bo'lsa, f (x) *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

Demak, f (x) ftinksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ushbu

1) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ = b ning mavjudligi,

2) b = $f(x_0)$ bo'lishi shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

Misollar. 1.Ushbu f (x) = $x^4 + x^2 + 1$

funksiya $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x^4 + x^2 + 1) = x_0^4 + x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

2. Ushbu $f(x) = (\sin x)^2 = \begin{cases} 1, & agar\ \ x \neq 0\ \ bo'lsa \\ 0, & agar\ \ x = 0\ \ bo'lsa \end{cases}$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, $\forall x_0 \in R$ nuqtada $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ bo'ladi. Demak, qaralayotgan funksiya $\forall x_0 \in R,\ x \neq 0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Ammo f (0) = 0 bo'lganligi sababli

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

bo'ladi. Demak, f (x) fiinksiya x_0= 0 nuqtada uzluksiz bo'lmaydi.

Funksiya limitining Geyne va Koshi ta'riflariga binoan x_0 funksiyaning nuqtadagi uzluksizhgini quyidagicha ta'riflash mumkin.

2- **ta'rif.** Agar

$$n \to \infty\ \ da\ \ x_n \to x_0,\ \ (x_n \in X, n = 1,2, \dots)$$

bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$n \to \infty\ \ da\ \ f(x_n) \to f(x_0)$$

ISSN 2181-3187

boisa, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

3- **ta'rif.** Agar $\forall\varepsilon > 0$ son ohnganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{U_\delta(x_0)}$ uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, f (x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Odatda, x-x_0 ayirma *argument orttirmasi*, f (x) - f (x_0) esa *funksiya orttirmasi* deyilib, ular mos ravishda $\Delta x\ va\ \Delta f$ kabi belgilanadi:

$\Delta x = x - x_0,\ \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(c).$

Unda funksiya uzluksizligining 1- ta'rifidagi (1) munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishga keladi. Demak, (2) munosabatni funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qarash mumkin.

Aytaylik, f (x) funksiya X ⊂ R to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in$ X nuqta X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

4- ta'rif. Agar

$$\lim_{x\to x_0+0} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f}(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0-0} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f}(x_0)$$

bo'lsa, f(x) funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Demak, f(x) funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz bo'lganda funksiyaning o'ng (chap) limiti uning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi:

$$f(x_0 + 1) = f(x_0), \quad f(x_0 - 1) = f(x_0)$$

Keltirilgan ta'riflardan, f(x) funksiya (x_0) nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'hshini topamiz.

Umuman, f(x) funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, $\forall\varepsilon > 0$ berilganda ham unga ko'ra shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilib,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \ \to f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bo'lishini bildiradi.

5- ta'rif. Agar f(x) funksiya X ⊂ R to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, f(x) ftinksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi.

6- ta'rif. X ⊂ R to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam ***uzluksiz funksiyalar to 'plami*** deyiladi va C(X) kabi belgilanadi.

Masalan, f (x) ∈ C$[a, b]$ bo'lishi, f(x) funksiyaning [a, b] segmentning har bir nuqtasida uzluksiz, ya'ni f(x) funksiya (a, b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz, ***a*** nuqtada o'ngdan, ***b*** nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lishini bildiradi.

1.2 Uzluksiz funksiyalarning xossalari.

Faraz qilaylik, f(x) funksiya X ⊂ R to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ bo'lsin. **1.** Agar f(x) funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $\delta > 0\ \ va\ \ M > 0$ sonlar topiladiki, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ da $|f(x)| < M$ bo'ladi, ya'ni f(x) funksiya x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida

ISSN 2181-3187

chegaralangan bo'ladi.

2. Agar f(x) funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ da sinf(x) = sinf(x_0) bo'ladi, ya'ni f(x) funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi boiadi.

Bu tasdiqlarning isboti limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalaridan kelib chiqadi.

3. Aytaylik, y = f (x) funksiya x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = b, \quad (b \in R) \qquad \textbf{(1)}$$

ga ega bo'lib, g(y) funksiya Y to'plamda berilgan {f(x) | x ∈ X}∪ $\{b\} \subset Y$ va y = b nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(b), \quad \text{ya'ni}$$

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \qquad \textbf{(2)} \qquad \text{bo'ladi.}$$

$n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ $(x_n \in X,\ x_n \neq x_0$, n = l, 2 ,...) bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_0\}$ ketma-ketlikni olaylik. Unda **(1)** munosabatga ko'ra

$$n \to \infty \ \ da \ \ f(x_n) \to b$$

bo'ladi. Shartga ko'ra g(f (x)) funksiya ***b*** nuqtada uzluksiz. Demak,

$$n \to \infty \ \ da \ \ g(f(x_n)) \to g(b)$$

bo'ladi. Keyingi munosabatdan **(2)** tengliknig o'rinli bo'hshi kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad (a > 0, a \neq 1) \qquad \textbf{(3)}$$

munosabat isbotlansin.

(2) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e.$$

Xususan, $a = e$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ bo'ladi.

2- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad (a > 0)$ munosabat isbotlansin.

Keltirilgan tenglikni isbotlash uchun $a^x - 1 = t$ deb olamiz.

Unda $x \to 0$ da $t \to 0$ bo'ladi. Shuni hamda **(3)** munosabatni e'tiborga olib topamiz: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$

3-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a, \quad (a \in R) \qquad \text{munosabat isbotlansin}$$

Ravshanki, $(1+x)^a = e^{a\ln(1+x)}$ va $x \to 0$ da ln(l + x) → 0 bo'ladi. unda

ISSN 2181-3187

$$\frac{(1+x)^a-1}{x}=\frac{(e^{a\ln(1+x)}-1)}{a\ln(1+x)}*\frac{\ln(1+x)a}{x}$$

bo'lib, undan

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}*\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}*a=a$ bo'lishi kelib chiqadi.

1.3. Funksiyaning tekiz uzluksizligi.

Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi. Faraz qilaylik, f (x) funksiya X ⊂ R to'plamda berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon\in 0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$
son topilsaki, $|x'-x"|<\delta$
tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x',\ x"\in X$ uchun

$$|f(x')-f(x")|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\quad \forall x',x''\in X,\quad |x'-x"|<\delta{:}\ |f(x')-f(x")|<\varepsilon$

bo'lsa, f (x) funksiya X to'plamda ***tekis uzluksiz*** deyiladi.

Keltirilgan ta'rifdan:

1) $\delta>0$ sonning faqat $\varepsilon>0$ ga bog'liqligi;

2) f(x) ftinksiya X da tekis uzluksiz bo'lsa, u shu X to'plamda uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

1- misol. f (x) = x , x ∈ R bo'lsin. Bu funksiya R da tekis uzluksiz bo'ladi. Agar c ga ko'ra $\delta=\varepsilon$ deb olinsa, unda $\forall x',x''\in X,\ |x'-x"|<\delta$ da $|f(x')-f(x")|=|x'-x''|<\delta=\varepsilon$ bo'ladi.

2-misol. f(x) = sinx, x ∈ R bo'lsin. Bu funksiya R da tekis uzluksiz bo'ladi. Agar $\forall\varepsilon>0$ ga ko'ra, $\delta=\varepsilon$ deyilsa, unda $\forall x',x''\in R,\ |x'-x"|<\delta$ da $|\sin x'-\sin x''|=2\left|\cos\frac{x'+x\prime\prime}{2}\right|*\left|\sin\frac{x'-x\prime\prime}{2}\right|\le|x'-x''|<\delta=\varepsilon$ bo'ladi.

3- misol. f(x) = $\frac{1}{x}$, $x\in X$ = (0,1] bo'lsin. Bu funksiya X = (0,1] da tekis uzluksiz bo'lmaydi.

$\forall\varepsilon>0$ sonni, masalan, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ deb olib, x' va x'' nuqtalar sifatida

$$x'=\frac{1}{n}\ \ va\ \ x''=\frac{1}{n+1},(n\in N)$$

deb olinsa, u holda | x' - x' | ayirma quyidagicha

$$|x'-x"|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$$

bo'ladi. Bundan (| x′ − x′ | < δ δ ni har qancha kichik qilib olish

ISSN 2181-3187

mumkin bo'lsa ham

$|f(x') - f(x")| = \left|\frac{1}{x\prime} - \frac{1}{x\prime\prime}\right| = |n - (n+1)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$bo'ladi.

Demak, f(x) = $\frac{1}{x}$ funksiya X=(0, 1] da tekis uzluksiz emas.

XULOSA

Xulosa qilib shuni aytishim mumkinki, ushbu kurs ishi natijalaridan umumta'lim maktab matematika o'qituvchilari, yuqori sinf o'quvchilari, akademik litsey va kasb-hunar kolleji talabalari keng foydalanishi mumkin, hamda "Matematika o'qitish metodikasi" ta'lim yo'nalishi talabalari ham ayniqsa birinchi va ikkinchi kurs talabalariga bu kurs ishim funksiyaning uzlugsizligi mavzusini kengroq o'rganishlariga yordam beradi, degan umiddaman.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. T. Azlarov , H. Mansurov Matematik analiz, 1-tom. Toshkent, ≪ O'zbekiston ≫ , 1994,1995 yillar.
2. A. Sa'dullayev va boshqalar. "Matematik analiz kursidan misol va masalalar" to'plami, Toshkent, ≪ O'zbekiston ≫ 2000 yil.
3. G. Xudayberganov, A. Varisov, H. Mansurov. Matematik analiz 1 va 2 qisimlar. Qarshi, ≪ Nasaf ≫ 2003 yil.
4. R.M.Turg'unboyev "Matematik analiz". 2-qism. Toshkent 2008.