МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ

Саидов Асқар Ҳайитназарович
Бухоро Муҳандислик Технология Институти
академик лицейи математика фани ўқитувчиси

Аннотация. Математик индукция методи ёрдамида жуда кўп мадификациялар (вариантлар) ўйлаб топилган, индукция қадамини исботлашда, айрим таърифларни киритишда, қониқарли моделлари яратишда мухим ўрин тутади.

Калит сўзлар: Сонлар назарияси, математик индукция,Эйлер сонлари, математик мантиқ, математик лингвистика, математик назария

Аннотация. С использованием метода математической индукции придумано множество модификаций (вариантов), он играет важную роль в доказательстве шага индукции, введении некоторых определений и создании удовлетворительных моделей.

Ключевые слова: Теория чисел, математическая индукция, числа Эйлера, математическая логика, математическая лингвистика, математическая теория

Annotation: Using the method of mathematical induction, a lot of modifications (options) have been invented, it plays an important role in proving the step of induction, introducing some definitions, and creating satisfactory models.

Key words. Number theory, mathematical induction, Euler numbers, mathematical logic, mathematical linguistics, mathematical theory

Ҳусусий хулосалардан умумий хулосаларга ўтишдан иборат мулоҳазалар индуктив деб аталади. Одатда, маълум бир хосса бирор сондаги предментларда пайкалади, вақти келиб умумий фараз баён қилинади, сўнг у тажрибада текшириб кўрилади. Табиий (яъни табиатни ўрганувчи) фанларда текшириш жараёнида шундай вақт келадики, фаразни қабул қилиш исботланган деб ҳисоблаш учун етарли саналади. Масалан, Ч. Дарвин очган эволюция қонунини эслайлик. Математикада эса чексиз мажмуа ҳақида хулоса чақирилаётганда чекли сондаги ҳар қанча хол учун текширув ўтказилмасин, у исбот ўрнини боса олмайди.

Сонлар назарияси илк даврида математиклар кўплаб фактларни индуктив йўл билан очишган: Л. Эйлер ва К. Гаусс баъзида сонларга хос қонуниятларни пайқаш ва текшириш учун минглаб мисолларни кўришган. Айни вақтда улар атиги “чекли” синовдан ўтган фарзлар нақадар алдаши мумкинлигини тушунганлар. Ферма сонлари дейиладиган $F_R = 2^{2^k} + 1$ сонликлари К $=0,1,2,3,4$ ҳолларда туб сон бўлиб чиқди, лекин Эйлер F_5 сонининг бўлувчисини аниқлади.

ISSN 2181-3187

Мерсенн сонлари $M_p = 2_P - 1$, бунда р- туб сон, р =2, 3,5,7 бўдганда ўзлари ҳам туб, аммо р =11 учун бундай эмас (кейин р =13, 17, 19, ... учун яна туб бўлади). Лейбниц К = 1,2,3 учун текшириб кўргач, маълум вақт $n^{2k+1} - n$ сони 2К+1га бўлинади деб ўйлаган. Бироқ К =4 учун бу тўғри эмас.

Демак, чекли қисм-тўплам учун текширилган тасдиқдан бутун чексиз тўпламга доир тасдиққа индуктив ўтиш исбот талаб қилади. Бироқ чексиз сондаги ҳусусий ҳол учун текширув қандай бажарилиши мумкин? Бундай усулни Б.Паскаль ва Я.Бернулли таклиф этдилар. Ҳозир у математик индукция методи деган ном билан аталади. Бирор хосса A_1, A_2 …, $A_{n,}$ … кетма-кетлик элементлари учун исботланиши талаб қилсин. Бунинг учун қуйидаги етарли:

1) бу хоссанинг тўғрилигини A_1 учун текшириб кўриш (бу қадам индукция асоси ёки базиси дейилади);

2) бу хосса $A_k +$ учун тўғрилигини келтириб чиқариш (бу индуктив қадам).

Бу икки мулохаза бажарилгач исботланаётган хосса A_n ларнинг ҳаммаси учун тўғри деб тасдиқлаш мумкин.

Бир неча мисол келтирайлик. a_n = 1+2+ ... + n дастлабки n та натурал сон йиғиндиси бўлсин a_n = n(n+1)/ 2 формулани исботлаш керак n = 1 бўлса, а =1. сўнгра, агар a_k =К(+1)/ 2 бўлса, a_k+1=a_k+К +1=(К+1) (К+2)/ 2 –формула исботланди. Бошқа мисол: a_n = 1+3+…+(2n-1)- тоқ сонлар йиғиндиси. Исботлаш керак: $a_n = n^2$ n=1 учун бу тўғри. Агар $a_k = {}_k{}^2$,бўлса, a_k + (2 К +1),-k^2+2k+1 шу билан индуктив қадам босилди.

Математик индукция методини яққол қилиб айтганда, бири кейингисининг елкасига қўлини қўйган одамлар занжири тарзида тасаввур қилиш мумкин. Бу холда туташ қатор ҳосил бўлади, ҳолбуки бевосита туташиш фақат энг яқин қўшнилар орасида рўй беради.

Индуктив қадамни амалга ошириш доим ҳам осон эмас. Авваламбор, у ҳам берилган теореманинг ўзи каби чексиз ҳолат (k - ихтиёрий) учун текширилиши керак. Бирок математик индукция методининг афзаллиги шундаки, жуда кўп ҳолларда индукция қадами берилган теореманинг ўзини исботлашга қараганда енгилроқ. Шунинг учун индукция қадамини исботлар эканмиз, мулоҳазаларимиз ҳақиқатан ҳам k нинг ихтиёрий қийматида яроқлилигига пухта ишонч ҳосил қилиш керак.

Кўпинча, индукция билан теоремани барча n учун эмас, балки фақат етарлича катта n лар учун, яъни бирор берилган N сонидан катта n лар учун исботлашга тўғри келади. Бу ҳолда текширувни a_N учун ўтказиш индукция асосида ётади. Масалан, n ≥ 2000 бўлганда $n^3 - 4 > 1000\, n^2 + 3n$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботлайлик. У n =2000 бўлганда тўғрилигини бевосита текшириш мумкин. Энди индукция қадамига ўтиш мақсадида k+1 га ўтганда тенгсизлик чап томонига $3k^2$+3k+1, ўнг томонига эса 2000 k+1003 қўшилишига эътибор

ISSN
2181-3187

берайлик. Демак, агар биз k ≥ 2000 учун $3k^2+3k+1\geq 2000$ k +1003 ёрдамчи тенгсизликни исботласак, берилган тенгсизлик исботи тугайди. k =2000б бўлганда ёрдамчи тенгсизлик ўринли (бевосита текширилади). Сўнг юқоридагига ўхшаш мулохаза юритамиз: k дан k +1 ўтганда ёрдамчи тенгсизлик чап томонига 6k +6, ўн томонига эса 2000 қўшилади. k ≥ 2000 бўлганда 6k +6 ≥ 2000 эканлиги туфайли исбот ниҳоясига етди. Бу мисол айни пайтда мухим бир ҳолатни намойиш қилади: индукция қадамидаги тасдиқни ўз навбатида индукция билан исботланиши мумкин. Амалда бундан ҳам узунроқ индуктив исботлар занжири учраб туради. Унда исботланиши керак бўлган хосса борган сари соддалашади.

Индукция ёрдамида фақат теоремаларни исботлашгина эмас, айрим таърифларни киритиш ҳам қулай *A* кишини кўз олдига келтирайлик. Унинг ота-онаси ва болаларини биринчи тартибли қариндошлари деб атаймиз. Агар k – тартибли қариндош тушунчаси аниқланган бўлса, *A* нинг (k+1)-тартибли қариндошлари k – тартибли қариндошларининг биринчи тартибли қариндошларига айтамиз (кичикроқ тартибли қариндошлардан ташқари). Хусусан, бу таърифга кўра ака-укалар ва опа-сингиллар иккинчи тартибли қариндошлар бўлади. Индуктив таърифлар *математик мантиқ* ва математик лингвистикадамуҳим роль ўйнайди.

Индукция бўйича исботлаш математик фаолиятда мустаҳкам ўрин эгалади. Методнинг турли – туман татбиқларга мўлжалланган жуда кўп мадификациялари (вариантлари)ўйлаб топилган.

“Агар барча қарға қора бўлса, қора бўлмаган предметларнинг ҳеч бири қарға эмас”. Бу тасдиқ ҳеч бир шубҳасиз тўғридир ва буни тасдиқлаш учун қушларнинг ишқибози бўлиш асло шарт эмас. Худди шунга ўхшаш, агар барча мукаммал сонлар жуфт бўлса, тоқ сонларнинг ҳеч бири мукаммал эмас дейиш учун сонлар назариясининг мутахасиси бўлиш зарур эмас. Биз қатнашаётган тушунчалар (қарғалар,қора, мукаммал, жуфт) мазмунидан катъий назар тўғри бўлган фикрларгаиккита мисол келтирдик. Улар ўзининг асли шаклига кўра ҳақиқатдир. Шу тоифадаги фикр-мулоҳазарни ўрганиш мантиқнинг вазифасидан иборат. Умумийроқ қилиб айтганда: мантиқ тўғри мулоҳаза юритиш, тўғри фикрлаш усулларини, яъни тўғри хулосалар чиқариш усулларини ўрганади.

Математиклар таърифлар беради, теоремалар исботлайди, математик назариялар тузади ва ҳ. қ. Математик мантиқ мутахассислари буни кузатиб, математиклар қандай иш тутишларини ва натижада нималар ҳосил бўлишини текширади. Математик методлар айтайлик, физикада қандай қўлланади? Физик жараённинг муҳим томонларини акс эттирувчи математик модель қурилади. Математик методлар ёлғиз физикада эмас, бошқа фанларда ҳам қўлланиши мумкин. Масалан, математик методларнинг биологиядаги тадбиқи биологик

ISSN 2181-3187

жараёнларнинг математик моделини қуришга асосланади. Математик назарияларнинг ривожланиш жараёни учун ҳам математик моделлар қуриш мумкин. Худди шу билан математик мантиқ шуғулланади.

Математик назария қандай тузилган? У қандайдир тасдиқларни ўз ичига олади. Улардан баъзилари исботсиз қабул қилинади, бошқаларини эса исботлашга муваффақ бўлинади(бу ҳолда улар теоремалар дейилади). “Тасдиқ” ва “исбот” сўзларининг кундалик турмушдаги мазмуни анчайин хира, ноаниқ. Шу сабабли, агар, биз мамематик модель кўрмоқчи бўлсак, биринчи бўлиб шу тушунчаларни аниқлашимиз, яъни бизнинг формал моделдаги уларнинг аналогларини (қуруқ бўлса ҳам, лекин қатъий) ясашимиз лозим. Шу мақсадда математик мантиқ мутахассислари математик тасдиқларни қатъий баён қилишга мўлжалланган махсус формал тил ўйлаб топдилар.

Формал тилда ёзилган тасдиқлар (жонли тилдаги муҳокамалардан фарқланиши учун) формулалар деб юритилади.Формал тил қурилгандан сўнг биз математик тасдиқларни формулалар куринишида ёзиш имконига эга бўламиз.

Ҳозирги пайтда математик назариялардан кўпчилигининг жуда қониқарли моделлари яратилган, яъни формализацияси амалга оширилган. Айниқса формал арифметика ва аксиоматик тўпламлар назарияси муҳимдир. Формал арифметика натурал сонлар ҳақидаги фикрларни қатъий формага келтириш учун,тўпламларнинг аксиоматик назарияси эса тўпламларга оид фикрларни қатъий баён қилиш учун мўлжалланади.

Математик мантиқ математиканинг бир бўлими бўлиб, бунда мулоҳазалар ва улар устидаги мантиқий амаллар ўрганилади. Чин ёки ёлғонлиги ҳақида фикр юритиш мумкин бўлган ҳар қандай дарак гап мулоҳаза дейилади. Мулоҳазалар устида бажариладиган мантиқий амаллар махсус белгилар ёрдамида белгиланади. Масалан: ∀ ҳар қандай, ↔ - тенг кучлилик, ∨ - ёки амали, ∧ - ва амали, ∃ - мавжуд, ∄ - мавжуд эмас.

Шундай қилиб, математик мантиқнинг асосий предмети формал системаларни қуриш ва ўрганишдан иборат. Бу соҳадаги энг салмоқли натижа 1931 йилда австриялик математик К.Гёдель исботлаган тўлиқсизлик теоремадир. Бу теореманинг мазмуни: ҳар қандай “етарлича бой” формал системада ҳал қилинмайдиган тасдиқ мавжуд, яъни шундай A формула борки, на A нинг ўзини, на унинг инкорини исботлаб бўлади. Агар формал системани математиканинг унга мос соҳаси билан солиштириб, математиканинг ҳар бир “етарлича бой” соҳасида исботлаб ҳам, рад қилиб ҳам бўлмайдиган тасдиқ топилади, дея оламиз. Биз бу ерда формал система “етарлича бой”бўлиши учун қандай шартларга бўйсунишини аниқ айта олмаймиз. Фақат шуни таъкидлаймизки, формал системаларнинг кўпчилиги, хусусан, формал арифметика ва тўпламларнинг

ISSN 2181-3187

аксиоматик назарияси бу шартларни қаноатлантиради. Тўлиқсизлик теоремаси мисолида формал системани қуришдан келадиган наф ҳам кўринади: қандайдир тасдиқларни исботлаш мумкин эмаслигини исботлай оладиган бўламиз!

Адабиётлар рўйхати:

1. Ёш математик энциклоредик луғати.Toshkent-1989.
2. Геометрия 1-қисм, И.Исроилов, З.Пашаев Тошкент”Ўқитувчи”2004
3. “Алгебра ва математик анализ асослари” 1 қисм А.У.Абдуҳамидов, Н.А.Насимов, Тошекент ”Ўқитувчи”-2004