О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА

Тураев Х.

Доцент кафедры «Математики и методики ее преподавания» Термезского государственного педагогического института

Олтиев Б.Ж.

Преподаватель математики на кафедре «Математика и методика ее преподавания» Термезского государственного педагогического института

ON THE STRUCTURE OF SOLUTIONS OF ONE CLASS OF LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS OF THE n-TH ORDER

Turaev X.

Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching It, Termez State Pedagogical Institute

Email:nxurramov22mail.ru

Oltiev B.J.

Mathematics teacher at the department of "Mathematics and methods of teaching it", Termez State Pedagogical Institute

email:nxurramov22mail.ru

АННОТАЦИЯ: В настоящей работе изучается вопросы построения общего решения одного класса разностных уравнений следующего вида.

ABSTRACT: This paper studies the issues of constructing a general solution to one class of difference equations of the following form.

Ключевые слова: шаг, метод шагов, разность, разностное уравнение, структура, структуры множеств.

Key words: step, step method, difference, difference equation, structure, set structures.

$$x(t+n)+a_1(t)x(t+n-1)+\cdots+a_n(t)x(t)=0,$$

где t$\in R=(-\infty,+\infty), a_i(t), i=1,\dots n,$ - известные функции переменной t ($a_n(t)\neq 0, t\in R), x(t) -$ неизвестная функция.

В настоящей работе изучается вопросы построение общего решения одного класса разностных уравнений следующего вида

$$x(t+n)+a_1(t)x(t+n-1)+\cdots+a_n(t)x(t)=0, \qquad (1)$$

где t$\in R=(-\infty,+\infty), a_i(t), i=1,\dots n,$ - известные функции переменной t ($a_n(t)\neq 0, t\in R), x(t) -$ неизвестная функция.

Непрерывная функция $x(t)$ называется непрерывным решением уравнения (1) , если она обращает это уравнение в тождество. Из (1) непосредственно вытекает, что решение уравнения (1) должно быть определено на интервале длиной не мене n [1].

Построить явное выражение общего решения уравнения (1) можно лишь в отдельных случаях. Однако имеются методы, позволяющие построить частные решения таких уравнений.

Одним из наиболее эффективных среди них является метод шагов (последовательного интегрирования).

Суть его заключается в следующим. Если, например, функции $a_i(t)$, $i = 1, \dots n$, являются непрерывными при $t \geq t_0$, то полагая $x(t) = \varphi_0(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + 1]$, $x(t+1) = \varphi_1(t)$, … ,$x(t+n+1) = \varphi_{n-1}(t)$, где функции $\varphi_i(t), i = 0,1, \dots, n-1$, являются заданными , непрерывными при $t \in [t_0 , t_0 + 1]$ и $\varphi_0(t_0+1) = \varphi_1(t_0), \varphi_1(t_0+1) = \varphi_2(t_0)$, … , $\varphi_{n-2}(t_0+1) =$
$= \varphi_{n-1}(t_0)$, мы получим из (1) значение $x(t+n)$. Именно,

$$x(t+n) = -a_1(t)\varphi_{n-1}(t) - \dots - a_n(t)\varphi_0(t).$$

Подставляя в (1) $t+1$ вместо t и используя найденные значения $x(t), x(t+1), \dots, x(t+n)$ *мы сможем определить* $\mathrm{x(t+n+1)}$ *и т.д. При этом, если мы хотим построить непрерывное решение, то должны потребовать выполнения условия*

$$\varphi_{n-1}(t_0+1) = -a_1(t_0)\varphi_{n-1}(t_0) - \dots - a_n(t_0)\varphi_0(t_0).$$

Приведем несколько общих утверждений, касающихся структуры множество решений уравнения (1).

Теорема 1. Если $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ – частные решения уравнения (1) , то

$x(t) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t) x_i(t)$, где $\omega_i(t), i = 1, \dots, m,$ - произвольные 1 – периодические функции, также являются его решением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, поскольку

$$x(t+k) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t+k) x_i(t+k) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t) x_i(t+k), \quad k = 0,1, \dots, n,$$

то

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)\, x_i(t+n) + a_1(t) \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t) x_i(t+n-1) + \cdots + a_n(t) \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t) x_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)[x_i(t+n) + a_1(t)x_i(t+n-1) + \cdots + a_n(t)x_i(t)].$$

В силу того , что $x_i(t), i = 1, \dots, m,$ *являются решениями уравнения (1) имеем*

$$x_i(t+n) + a_1(t)x_i(t+n-1) + \cdots + a_n(t)x_i(t) \equiv 0, i = 1, \dots, m,$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)[x_i(t+n) + a_1(t)x_i(t+n-1) + \cdots + a_n(t)x_i(t)] \equiv 0.$$

Таким образом, $x(t) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)x_i(t)$ - решение уравнения (1). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть имеется n частных решений $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ уравнения (1) и

$$\mathcal{W}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1(t+1) & x_2(t+1) & \dots & x_n(t+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1(t+n-1) & x_2(t+n-1) & \dots & x_n(t+n-1) \end{vmatrix} \neq 0$$

(2)

при всех t. Тогда общее решение (1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t)x_i(t) \qquad (3)$$

где $\omega_i(t), i = 1, \dots, n,$ - *произвольные 1 – периодические функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y(t)$ *– некоторое решение уравнения (1), отличное от* $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. *Тогда для доказательстиа теоремы достаточно, очевидно, показать,*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t)x_i(t). \qquad (4)$$

Последовательно полагая в (4) t+1, t+2, … t+n-1 в место t, получим систему n уравнений для определения $\omega_i(t), i = 1, \dots, n,$ *:*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t)x_i(t),$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t)x_i(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) x_i(t).$$

В силу (2) система уравнений (5) имеет единственное решение [2]

$$\omega_i(t) = \frac{\mathcal{W}_i(t)}{\mathcal{W}(t)}, \quad i = 1, \ldots n \qquad (6)$$

где

$$\mathcal{W}_i(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \ldots x_{i-1}(t) \;\; y(t) \ldots x_n(t) \\ x_1(t+1) \ldots x_{i-1}(t+1) \;\; y(t+1) \ldots x_n(t+1) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_1(t+n-1) \ldots x_{i-1}(t+n-1) \;\; y(t+n-1) \ldots x_n(t+n-1) \end{vmatrix},$$

$i = 1, \ldots, n.$

Остаётся показать, что функции $\omega_i(t), i = 1, \ldots, n$, определяемые соотнощениями (6) являются 1 – периодическими. Действительно, поскольку

$$x_j(t+n) = -a_1(t)x_j(t+n-1) - \cdots - a_n(t)x_j(t), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

$$y(t+n) = -a_1(t)y(t+n-1) - \cdots - a_n(t)y(t),$$

то

$$\mathcal{W}_i(t+1) = \begin{vmatrix} x_1(t+1) \ldots x_{i-1}(t+1) \;\; y(t+1) \ldots x_j(t+1) \ldots x_n(t+1) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_1(t+n-1) \ldots x_{i-1}(t+n-1) \;\; y(t+n-1) \ldots x_j(t+n-1) \ldots x_n(t+n-1) \\ x_1(t+n) \ldots x_{i-1}(t+n) \;\; y(t+n) \ldots x_j(t+n) \ldots x_n(t+n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t+1) \ldots x_{i-1}(t+1) \;\; y(t+1) \ldots x_n(t+1) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_1(t+n-1) \ldots x_{i-1}(t+n-1) \;\; y(t+n-1) \ldots x_n(t+n-1) \\ -\sum_{j=1}^{n} a_j(t)x_1(t+n-j) \ldots -\sum_{j=1}^{n} a_j(t+n-j) \;\; -\sum_{j=1}^{n} a_j(t)y(t+n-j) \ldots -\sum_{j=1}^{n} a_j(t)x_n(\end{vmatrix}$$

$=$

$$= -\sum_{j=1}^{n-1}\begin{vmatrix} x_1(t+1)\ldots\ x_{i-1}(t+1) & y(t+1)\ldots\ x_n(t+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1(t+n-1)\ldots\ x_{i-1}(t+n-1) & y(t+n-1)\ldots\ x_n(t+n-1) \\ a_j(t)x_1(t+n-j)\ldots\ a_j(t)x_{i-1}(t+n-j) & a_j(t)y(t+n-j) \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} x_1(t+1)\ldots\ x_{i-1}(t+1) & y(t+1)\ldots\ x_n(t+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ x_1(t+n-1)\ldots\ x_{i-1}(t+n-1) & y(t+n-1)\ldots\ x_n(t+n-1) \\ a_n(t)x_1(t)\ldots\ a_n(t)x_{i-1}(t) & a_n(t)y(t)\ldots\ a_n(t)x_n(t) \end{vmatrix} =$$

=-

$$-\sum_{j=1}^{n-1} a_j(t)\begin{vmatrix} x_1(t+1)\ldots\ x_{i-1}(t+1) & y(t+1)\ldots\ x_n(t+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1(t+n-1)\ldots\ x_{i-1}(t+n-1) & y(t+n-1)\ldots\ x_n(t+n-1) \\ x_1(t+n-j)\ldots\ x_{i-1}(t+n-j) & y(t+n-j)\ldots\ x_n(t+n-j) \end{vmatrix} -$$

$$-a_n(t)\begin{vmatrix} x_1(t+1) & \ldots & x_{i-1}(t+1) & y(t+1)\ldots & x_n(t+1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_1(t+n-1)\ldots & & x_{i-1}(t+n-1) & y(t+n-1)\ldots & x_n(t+n-1) \\ x_1(t) & \ldots & x_{i-1}(t) & y(t)\quad\ldots & x_n(t) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, так как

$$\begin{vmatrix} x_1(t+1)\ldots\ x_{i-1}(t+1) & y(t+1)\ldots\ x_n(t+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1(t+n-1)\ldots\ x_{i-1}(t+n-1) & y(t+n-1)\ldots\ x_n(t+n-1) \\ x_1(t+n-j)\ldots\ x_{i-1}(t+n-j) & y(t+n-j)\ldots\ x_n(t+n-j) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$j = 1, \ldots, n-1,$$

то

$$\mathcal{W}_i(t+1) = (-1)^n a_n(t)\mathcal{W}_i(t)\,,\ \ i = 1\,,\ldots\,,n\,.$$

Совершенно аналогично можно показать что

$$\mathcal{W}(\mathrm{t}+1) = (-1)^n a_n(t)\mathcal{W}(\mathrm{t}).$$

Следовательно,

$$\omega_i(t+1) = \frac{\mathcal{W}_i(t+1)}{\mathcal{W}(\mathrm{t})} = \frac{(-1)^n a_n(t)\mathcal{W}_i(t)}{(-1)^n a_n(t)\mathcal{W}(\mathrm{t})} = \frac{\mathcal{W}_i(t)}{\mathcal{W}(\mathrm{t})} = \ \omega_i(t)\,,\ \ i = 1, \ldots n$$

Теорема 2 доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Пелюх Г.П. , Шарковский А.Н. О линейных разностных уравнениях с периодическими коэффициентами. В кн.: Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1977. С.91-100.

2. Тураев Х. О Структуре непрерывных решений систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами. В кн.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений смещанных типов. Ташкент: Фан. 1990 с.