АРАЛАШ ТУРДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН СОҲАНИНГ ЭЛЛИПТИК ҚИСМИ ЧЕГАРАСИДА ЛОКАЛ ВА НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

Хуррамов Носир Хамидович

Термиз давлат педагогика институти “Математик ва уни ўқитиш методикаси” кафедраси мудири, ф.м.ф.ф.д, д.в.б.

Олтиев Бахриддин Жўраевич

Термиз давлат педагогика институти “Математик ва уни ўқитиш методикаси” кафедраси ўқитувчиси,

Annotatsiya: Ушбу мақолада сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун масала ўрганилаётган соҳанинг гиперболик чегараси характеристикалардан, эллиптик қисми тенгламанинг нормал чизиғи ва Oy ўқининг кесмасидан иборат бўлган соҳада Бицадзе – Самарский шартлари σ_a нормал ва бузилиш чизиқларида ҳамда Ox ва Oy ўқининг кесмаларида берилган масаланинг корректлиги ўрганилган.

Kalit so’zlar: экстремум принципи, ечимнинг ягоналиги, Ф.Трикомининг сингуляр интеграл тенгламаси, ечимнинг мавжудлиги, яккаланган нуқтада биринчи тартибли махсусликка эга бўлган ядро, Винер – Хопф тенгламаси, индекс.

Аннотация: Для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в некоторой смешанной области, когда граница эллиптичности совпадает с отрезком оси Оу и нормальной кривой уравнения исследована задача с условиям Бицадзе–Самарского на границе эллиптичности и на линии вырождения. Доказана корректность сформулированной задачи.

Ключевые слова: принцип экстремума, единственность решения, сингулярное интегральное уравнение Ф. Трикоми, существование решения, ядро с особенностью первого порядка в изолированной особой точке, уравнение Винера-Хопфа, индекс.

Annotation: For the Gellerstedt equation with a singular coefficient in some mixed domain, when the ellipticity boundary coincides with the segment of the Oy axis and the normal curve of the equation, the problem with the Bitsadze – Samarskii conditions on the elliptic boundary and on the degeneration line is studied. The correctness of the formulated problem is proved.

Keywords: extremum principle, uniqueness of a solution, F. Tricomi singular integral equation, existence of a solution, kernel with a first-order singularity at an isolated singular point, Wiener-Hopf equation, index.

$$(sign y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0 / y)u_y = 0$$

(1)

тенглама $O(0,0)$, $A(a,0)$ нуқталардан чиқувчи $OC: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=0$ ва $AC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=a$ характеристикалари ҳамда Oy ўқнинг OB кесмаси ва $\sigma_a: x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=a^2,\ x\geq 0,\ y>0$ нормал чизиқнинг AB ёйи билан чегараланган D_a соҳада қаралган, бу ерда $B=B(0,b)$, $b=const>0$.

D_a^+ ва D_a^- белгилашлар билан D_a соҳанинг мос равишда юқори ва пастки ярим текисликларини белгиланган.

Фараз қилайлик $y=-k(x-x_0)$ $(x\leq x_0,\ 0\leq x_0\leq a)$ тўғри чизиқ координата ўқлари билан $(x_0,0)$ ва $(0,kx_0)$ нуқталарда кесишсин, бу ерда $k=b/a,\ b=((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$.

БС **(Бицадзе-Самарский) масаласи.** D_a соҳада (1) тенгламанинг ушбу шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{D_a})$ ечими топилсин:

1) $u(x,y)$ функция $C^2(D_a^+)$ синфга тегишли ва D_a^+ соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради;

2) $u(x,y)$ функция D_a^- соҳада (1) тенгламанинг R_1 синфга тегишли умумлашган ечими;

3) қуйидаги тенгликлар бажарилади:

$$u(x,\sigma_a(x))=c(x)u(x,0)+\varphi_1(x),\ 0\leq x\leq a; \tag{2}$$

$$u(0,kx)=\mu(x)u(x,0)+\varphi_2(x),\ 0\leq x\leq a; \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{OC}=\psi(x),\ 0\leq x\leq a/2, \tag{4}$$

бунда $c(x),\ \varphi_1(x),\ \mu(x),\ \varphi_2(x)\in C[0,a],\ \psi(x)\in C[0,a/2]\cap C^{1,\delta}(0,a/2)$ – берилган функциялар бўлиб, қуйидаги муносабатлар ўринли: $\psi(0)=0,\ \varphi_2(0)=0,$ $\varphi_1(0)=\mu(a)\varphi_1(a)+\varphi_2(a),\ \mu(x)=x^{\delta_1}\tilde{\mu}(x), \varphi_2(x)=x^{\delta_1-m}\tilde{\varphi}_2(x),\ \delta_1>(m+2)(1+\beta)-1,$ $\tilde{\mu}(x),\ \tilde{\varphi}_2(x)\in C[0,a],\ \varphi_1(x)=(a-x)^{\delta_2}\tilde{\varphi}_1(x),\ \delta_2>1/2,\ \tilde{\varphi}_1(x)\in C[0,a].$

4) $y=0, 0\leq x\leq a$ бузилиш чизиғида ушбу

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\qquad 0<x<a, \tag{5}$$

уланиш шартлари бажарилиб, бу лимитлар $x\to 0,\ x\to a$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибдаги махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)\in(0,1/2)$.

(2) ва (3) σ_a нормал ва бузилиш чизиқларида ҳамда Ox ва Oy ўқнинг кесмаларида берилган Бицадзе – Самарский шартлари ҳисобланади.

БС масаласи ечимининг ягоналигини исботлашда

$$\tau(x)=u(x,0),\ 0\le x\le a;\quad \nu(x)=\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ 0<x<a,$$

ушбу бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ва D_a^- соҳада (1) тенгламанинг ва шакли ўзгарган Коши масаласининг ечимидан иборат қуйида берилган Дарбу [1, с.34] формуласидан фойдаланамиз

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^a \tau\left[x+\frac{2(2t-a)}{a(m+2)}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right]t^{\beta-1}(a-t)^{\beta-1}dt+$$
$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_0^a \nu\left[x+\frac{2(2t-a)}{a(m+2)}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right]t^{-\beta}(a-t)^{-\beta}dt,$$

(6)

бунда $\gamma_1=\dfrac{a^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\ \gamma_2=-\dfrac{a^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}.$

$D_a^+\bigcap\{x>0\}$ соҳада (1) тенгламанинг ечимидан иборат ҳамда

$$u(x,y)|_{\sigma_a}=\varphi_1(x),\ 0\le x\le a;\ u(0,y)=\varphi(y),\ 0\le y\le b;\ \nu(x)=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ 0<x<a$$

ушбу чегаравий шартларни қаноатлантирувчи шакли ўзгарган N масаласининг ечими [2, с. 149] қуйидагича ифодаланади.

$$u(x,y)=-\int_0^a \nu(t)G(t,0;x,y)dt-\int_0^b t^m\varphi(t)G_\xi(0,t;x,y)dt-$$
$$-\int_0^a \varphi_1(\xi)\left[\frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}G(\xi,\eta;x,y)-\frac{\partial}{\partial\eta}G(\xi,\eta;x,y)\right]d\xi,$$

(7)

бу ерда $(\xi,\eta)\in\sigma_a$.

(3) -шартни эътиборга олиб (7)- формуладан қуйидаги муносабатга эга бўламиз

$$u(x,y)=-\int_0^a \nu(t)G(t,0;x,y)dt-\int_0^b t^m(\mu(t)\tau(t)+\varphi_2(t))G_\xi(0,t;x,y)dt-$$
$$-\int_0^a \varphi_1(\xi)\left[\frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}G(\xi,\eta;x,y)-\frac{\partial}{\partial\eta}G(\xi,\eta;x,y)\right]d\xi.$$

(8)

БС масаласининг корректлигини асослашда (6) ва (8) муносабатлардан фойдаланиб янги типдаги ностандарт сингуляр интеграл тенгламаларга олиб келинади. Интеграл тенгламаларнинг ностандартлиги шундан иборатки, биринчидан Трикоми интеграл тенгламасининг носингуляр қисмида силжишлар пайдо бўлади, агар интеграл тенгламанинг характеристик қисми ажратилганда ўнг томондаги оператор одатда, доимо Фредгольм оператори бўлар эди, қаралаётган масалада оператор Фредгольм оператори бўлмайди, бунинг асосий сабаби шундан иборатки, унинг ядроси битта кўзғалмас нуқтада биринчи тартибли махсусликка эга бўлади. Бу ҳолат тенгламани икки марта регулярлаштиришга олиб келинади. Биринчи регулярлаштиришда интеграл тенгламанинг ўнг томонини маьлум деб, силжишли сингуляр интеграл тенгламани Соломон Григорьевич Михлиннинг [3] модификация қилинган усулида, иккинчи марта ечимнинг ўнг томонига олдин белгиланган номаьлумнинг қийматини қўйиб Винер- Хопф интеграл тенгламасига олиб келинади. Бу жараённи амалга ошириш ўзига хос қийинчиликларга эга. Бунда гипергеометрик функциянинг хоссаларидан ва чегирмалар назариясидан фойдаланилган ҳолда амалга оширилади. Бу масала Фурье алмаштириши ёрдамида Риман масаласига олиб келинади ва регулярлаштириш орқали иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига келтирилади. Ушбу тенглама ечимининг мавжудлиги, қўйилган масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқади.

БС масаласининг бир қийматли ечилиши [4] ишдаги метод орқали амалга оширилади.

Адабиётлар:

1. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005."Universitet "Yangi yo`l poligraf servis"224 с.
2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа. 1985,-304с.
3. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении F.Trikomi.// ДАН СССР.1948.т.59,№6, с.1053-1056.
4. Мирсабуров М., Хуррамов Н. Задача с условием Бицадзе - Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2020, том 56 №8, С.1073-1094.