
О ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА

Кеунимжаев М.К.

E-mail: keunimjaeff@gmail.com

Ташкентский финансовый институт

Кафедра “Высшей и прикладной математики”

Абстракт. В данной статье представлена информация об одной из производственных функций Кобба-Дугласа. Также на примерах приведены методы определения эффективности производства.

Ключевые слова: труд, капитал, ресурс, эффективность, регрессия, эластичность, логарифм, показатель.

Введение

Двумя основными факторами производства являются капитал и труд. Определенное соотношение их сочетания создает условия для получения продукта. Цель производственной функции Кобба-Дугласа – отразить технологическое соотношение количества труда и капитала, необходимых для производства определенного продукта в необходимом количестве.

Эта производственная функция базируется на двух факторах. Впервые ее предложил шведский экономист Кнут Вексель, но статистическую проверку провели два учёных, Чарльз Кобб и Пол Дуглас, в 1927-1947 годах (в 1928 году была опубликована их работа «Теория производства»). Имена этих ученых стали названием производственной функции.

Также, в более узком смысле, термин «производственная функция Кобба-Дугласа» используется для обозначения постоянной отдачи от масштаба.

Производственная функция, разработанная Коббом и Дугласом, является первой совокупной производственной функцией. Его использование позволило моделировать не только мелкомасштабные процессы, но и целые отрасли экономики. Статистическим подтверждением этой функции является начало нового этапа макроэкономического развития, позволяющего оценить эффективность производства на уровне национальной экономики.

Основная часть

Формула производственной функции Кобба-Дугласа отражает зависимость объема производства определенного продукта от сочетания двух факторов производства – труда и капитала. В общем виде формула имеет следующий вид:

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

Здесь Q — показатель объема производства, характеризующий реальную стоимость продукции и услуг, произведенных за определенный период; A – общий показатель технологической продуктивности факторов. Определение этого показателя является наиболее трудным и при определенном уровне погрешности обеспечивает возможность несовершенства оценки вклада труда и капитала, а также влияния других факторов; L – затраты труда, выраженные в количестве человеко-часов, отработанных всеми работниками за определенный

период времени при производстве определенного объема продукции; K – стоимость капитала, вложенного в производство определенного объема продукции, выраженная в реальной стоимости оборудования и машин, используемых в производстве; α – технологическая гибкость труда; β – технологическая эластичность капитала.

Эта формула основана на статистических расчетах, а для развитых стран характерны постоянные доли труда и капиталовложений в течение длительного периода времени. Однако сейчас эта гипотеза находится под вопросом.

Важнейшими показателями производственной функции Кобба-Дугласа являются показатели эластичности факторов производства, которые отражают влияние изменения их соотношения на физический объем производства при прочих равных условиях.

$\alpha + \beta = 1$ – это соотношение описывает постоянную отдачу от масштаба, например, при 100% увеличении затрат труда и капитала объем производства удваивается на те же 100%. Производственная функция линейно однородна;

$\alpha + \beta > 1$ – это соотношение описывает увеличение дохода, например, при увеличении на 100% труда и затраченного капитала объем производства увеличивается, скажем, на 120%, т. е. более чем в два раза;

$\alpha + \beta < 1$ – это соотношение описывает убывающую отдачу от масштаба.

Производственная функция – это экономико-математическая количественная связь между объемом производства (продукта фирмы) и факторами производства, например, стоимостью ресурсов, уровнем технологии.

Пример 1. Производственная функция предприятия выглядит следующим образом:

$$Q = L^{0,5} \cdot K^{0,5}$$

Предположим, что в день затрачивается 4 часа труда ($L=4$) и 4 часа машинной работы ($K=4$). Здесь

- 1) максимальное количество выпускаемой продукции;
- 2) средний продукт труда;
- 3) предположим, что фирма удваивает затраты на оба фактора. Каков будет результат?

Решение:

- 1) Максимальное количество продукта достигается максимальным использованием обоих факторов производства:

$$Q_{\max} = 4^{0,5} \cdot 4^{0,5} = 4$$

- 2) средний продукт труда:

$$ATL = \frac{Q}{L} = \frac{4}{4} = 1$$

- 3) предположим, что фирма удваивает затраты на оба фактора. Тогда объем производства будет следующим:

$$Q_{\max} = 8^{0,5} \cdot 8^{0,5} = 8$$

так что это также удваивается. Это единица отдачи от масштаба производства: производство увеличивается на ту же величину, что и количество

использованных ресурсов.

Пример 2. На основе информации, приведенной в таблице ниже, сконструируйте ПФ типа Кобба-Дугласа. Если планируется увеличить основные фонды на 20% и одновременно сократить трудовые ресурсы на 5% по сравнению с прошлым годом, сделайте прогноз промышленного производства на 2017 год. Приведем основные показатели некоторых отраслей за четыре года:

1-таблица

Год	Объем производства – Y млн. д.е.	Основные фонды – K млн. д.е.	Трудовые ресурсы – L тыс. человек
2010	431	650	91
2011	440	710	93
2012	462	773	94
2013	482	836	95
2014	503	888	95
2015	510	890	95
2016	531	913	96

Решение: Параметры A , α , входящие в функцию Кобба-Дугласа $Y = A \cdot L^{1-\alpha} \cdot K^\alpha$, находим методом наименьших квадратов по этой таблице. Если ввести следующие обозначения,

$$y = \ln \frac{Y}{L}; \quad x = \ln \frac{K}{L}; \quad c = \ln A$$

то функцию Кобба-Дугласа можно линейно переписать в логарифмах:

$$\ln \frac{Y}{L} = \ln A + \alpha \ln \frac{K}{L},$$

или

$$y = \alpha x + c$$

В результате коэффициенты регрессии c и α в линейной зависимости находятся по следующим формулам:

$$\alpha = \frac{n \sum (x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum (x_i^2) - (\sum x_i)^2}, \quad c = \frac{1}{n} \sum (y_i) - \alpha \cdot \frac{1}{n} \sum (x_i)$$

Здесь данные x_i , y_i вводятся из следующей таблицы:

2-таблица

Год	$y = \ln \frac{Y}{L}$	$x = \ln \frac{K}{L}$
2010	1,56	1,97
2011	1,55	2,03
2012	1,59	2,11
2013	1,62	2,17
2014	1,67	2,24
2015	1,68	2,24
2016	1,71	2,25

Теперь составим расчетную таблицу ($n = 7$):

3-таблица

Год	y	x	yx	x^2
2010	1,56	1,97	3,06	3,87
2011	1,55	2,03	3,16	4,13
2012	1,59	2,11	3,35	4,44
2013	1,62	2,17	3,53	4,73
2014	1,67	2,24	3,73	5,00
2015	1,68	2,24	3,76	5,01
2016	1,71	2,25	3,85	5,07
Σ	11,38	15,01	24,44	32,24

$$\alpha = \frac{7 \cdot 24,44 - 11,38 \cdot 15,01}{7 \cdot 32,24 - (15,01)^2} \approx 0,529;$$

$$c = \frac{1}{7} \cdot 11,38 - 0,529 \cdot \frac{1}{7} \cdot 15,01 \approx 0,493;$$

$$A = e^c = e^{0,493} \approx 1,637$$

Функция Кобба-Дугласа имеет следующий вид:

$$Y = 1,637 \cdot K^{0,529} \cdot L^{1-0,529} = 1,637 \cdot K^{0,529} \cdot L^{0,471}$$

Составляем прогноз объема промышленного производства на 2017 год, если планируется увеличить основные фонды на 20% и одновременно сократить трудовые ресурсы на 5% по сравнению с прошлым годом, новые значения:

$$K = 913 \cdot 1,2 = 1095,6; \quad L = 96 \cdot 0,95 = 91,2$$

Таким образом, прогноз объема производства составляет:

$$Y_{2017} \approx 1,801 \cdot 1095,6^{0,502} \cdot 91,2^{0,498} \approx 555,747$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Человеческий капитал является очень важным фактором производства. В исследованиях Узавы (1965) и Лукаса (1988) она была включена в качестве ключевой переменной в производственную функцию Кобба-Дугласа. Таким образом, обмен фактора труда (L) приводит к изменению фактора человеческого капитала (K), технологии (A) и финансового капитала (K).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xashimov A.R., Babadjanov Sh.Sh., Xujaniyozova G.S. T.: “Iqtisod-moliya”, 2019. 572 b.
2. Sotvoldiyev A.I., Yuldashev S.A. Matematik modellashtirish va matematik model qurish metodlari. Pedagog respublika ilmiy jurnali. Uzbekistan. 2023. 5-son. 44-50 betlar. <https://bestpublication.org/index.php/pedg/article/view/2985>
3. Sotvoldiyev A.I. Kobb-Duglas ishlab chiqarish funksiyasi haqida. Journal of New Century Innovations. Uzbekistan. 2023. Vol. 34, Issue 1. pp. 102-105. <https://www.newjournal.org/index.php/new/article/view/8408>

4. Yuldashev S.A. Yuqori tartibli differensial tenglamalarni o‘qitish metodikasi. O‘zbekistonda fanlararo innovatsiyalar va ilmiy tadqiqotlar jurnali. Uzbekistan. 2023. 18-son. 1348-1354 betlar.
<https://bestpublication.org/index.php/ozf/article/view/5534>
5. Ostonaqulov. D.I. Aniqmas integral va uning ba’zi iqtisodiy tatbiqlari. Journal of New Century Innovations, 34(1), 2023. 106–112. Retrieved from <http://www.newjournal.org/index.php/new/article/view/8409>
6. Yuldashev Sanjarbek Arslon o‘g‘li. (2023). Moliyaviy ehtimollar nazariyasi. Ta’lim innovatsiyasi va integratsiyasi, 5(1), 66–68. Retrieved from <http://web.journal.ru/index.php/ilmiy/article/view/532>
7. Yuldashev Sanjarbek Arslon o‘g‘li. (2023). Application of theory of probability in solving economic problems. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 11(10), 358–362. Retrieved from <https://internationaljournals.co.in/index.php/giirj/article/view/4491>
8. Yuldashev Sanjarbek Arslon o‘g‘li. (2023). The Solution of Economic Tasks with the Help of Probability Theory. Texas Journal of Engineering and Technology, 26, 26-29. Retrieved from <https://zienjournals.com/index.php/tjet/article/view/4654>
9. Gafurjan Ibragimov, Omongul Egamberganova, Idham Arif Alias and Shravan Luckraz. On some new results in a pursuit differential game with many pursuers and one evader. AIMS Mathematics, 8(3): 6581-6589.
<http://www.aimspress.com/journal/Math>
10. Azatova S.N Tenglamalarni yechishga o‘rgatishda o‘quvchilarda tartibga solish universal o‘quv harakatlarini shakllantirish haqida. Муаллим ҳам узликсиз билимлендириў jurnali Uzbekistan. 2023. 173-178 betlar
11. Omonov Sherzod Shavkat o‘g‘li. (2023). Integration of kaup’s loaded border system in the class of periodic functions. Spectrum Journal of Innovation, Reforms and Development, 21, 1-6. Retrieved from <https://sjird.journalspark.org/index.php/sjird/article/view/806>
12. Omonov Sherzod Shavkat o‘g‘li. (2023). Integration of the nonlinear modified kortevæg-de fries equation loaded in the class of periodic functions. Web of Technology: Multidimensional Research Journal, 1(8), 16–20. Retrieved from <https://webofjournals.com/index.php/4/article/view/353> Wire Insights: Journal of Innovation Insights Volume 1, Issue 7, December 2023 ISSN (E): 2810-6458 Website: <https://academiaone.org/index.php/725>
13. Yuldashev Sanjarbek Arslon o‘g‘li. (2023). Chiziqli tenglamalar sistemasini iqtisodga tadbiq qilingan masalalarini microsoft excel yordamida yechish. PEDAGOGS, 46(1), 27-31. Retrieved from <http://pedagogs.uz/index.php/ped/article/view/75>

14. Yuldashev Sanjarbek Arslon o'g'li, Azatova Sevara Nematjon qizi, Probability Theory in Financial. Journal of Innovation Insights, Volume 1, Issue 7, December 2023 ISSN (E): 2810-6458, <https://academiaone.org/index.php/7>
15. Жалалова Н.А., Азатова С.Н. К. Эффективные методики преподавания математики в средней школе // Вестник науки и образования. 2020. №. 6-2 (84). С. 28-30.
16. Sharipov A., Keunimjaev M. Existence and Uniqueness of Polyhedra with Given Values of the Conditional Curvature // International Electronic Journal of Geometry. 2023. Т. 16. №. 1. С. 160-170.
17. Sharipov A., Keunimjaev M. Existence and Uniqueness of Polyhedra with Given Values of the Conditional Curvature at the Vertices. 2023. <https://doi.org/10.36890/iejg.1246589>
18. Шарипов А.С., Кеунимжаев М. К. Об инвариантах поверхностей, изометричных по сечениям // Теория управления и математическое моделирование. 2022. С. 255-258. <https://doi.org/10.13189/ms.2023.110306>
19. Sotvoldiev A.I., Ostonakulov D. I. Mathematical models in economics // Spectrum Journal of Innovation, Reforms and Development. 2023. Т. 17. pp. 115-119.
20. Sotvoldiyev A.I. et al. Mathematics of economic processes nature and methods of modeling // Science and Education. 2023. Т. 4. №. 3. pp. 829-835.
21. Sotvoldiyev A.I., Xidirov N.G. Dinamik modellarni iqtisodiyotda qo'llanilishi // Science and Education. 2022. Т. 3. №. 3. 1128-1137 betlar.
22. Sotvoldiyev A.I., Ostonaqulov D.I. About Game Theory And Types Of Games // Texas Journal of Engineering and Technology. 2023. Т. 23. pp. 11-13.
23. Ostonaqulov D.I. Integration and applications in economic dynamics // Open Herald: Periodical of Methodical Research. 2023. Т. 1. №. 4. pp. 9-14.
24. Bakirov S.D. The financial efficiency through automation // Zamonaviy fan, ta'lim va ishlab chiqarish muammolarining innovatsion yechimlari. 2023. Т. 10. 36-38 betlar.
25. Bakirov S.D. The financial efficiency through automation // Ta'lim va innovatsion tadqiqotlar. 2023. Т. 11. 5-7 betlar.
26. Bakirov S.D. The risk assessment and management. journal of economy, tourism and service. 2023. 2(11), 45-50.
27. Bakirov S.D. Enhancing decision-making and risk management // Online-conferences. Platform. 2023. pp. 92-93.
28. Bakirov S.D. Koordinatalarni almashtirish. ikkinchi tartibli chiziqlar klassifikatsiyasi va ularni kanonik ko'rinishga keltirish // Journal of new century innovations. 2023. Т. 29. №. 4. 94-99 betlar.