MODULLI TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

Shoimov B.S.[1,a], Raxmonov B.A[2].
[1]Dotesent, Iqtisodiyot va pedagogika universiteti, a
[2] o'qituvchi, Iqtisodiyot va pedagogika universiteti,
Qarshi shahri, O'zbekiston.
[a]e.mail: boxodir1@bk.ru
[a]https://orcid.org/0009-0009-9697-9973

Annotatsiya: Ushbu maqolada son o'qida modulli tenglama va tengsizliklarni yechish usullari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: modul, masofa, tenglama, tengsizlik, son o'qi, tenglamaning ildizi, oraliq.

MODULAR EQUATIONS AND INEQUALITIES.

Annotation:_In this article, methods of solving modular equations and inequalities on the numerical axis are studied.

Key words:_module, distance, equation, inequality, number axis, root of equation, interval.

МОДУЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.

Аннотация:_В данной статье изучаются методы решения модульных уравнений и неравенств на числовой оси.

Ключевые слова:__модуль, расстояние, уравнение, неравенство, числовая ось, корень уравнения, интервал.

Ma'lumki, $(a-b)$ sonning moduli deb a sonidan b sonigacha bo'lgan masofa tushuniladi va $|a-b|$ kabi yoziladi.

<u>1 – misol.</u> $|x|=3$tenglamaning yechimini topaylik.

$|x|$ ko'rinish bizga $|x-0|$, ya'ni x soni 0 soni orasidagi masofani bildiradi. Demak, biz bu tenglamani "qandaydir sonlar va 0 soni orasidagi masofa 3 ga teng" deb qo'yilgan savol sifatida qabul qilamiz va shu savolga javob qidiramiz. Shu topilgan javob bizga tenglamaning ildizlarni aniqlab beradi. Savolga javob topish uchun yuqoridagi savolni o'zgartiramiz. "0 dan qanday sonlargacha bo'lgan masofa 3 ga teng". Biz shu savolga javob topish uchun chizma chizamiz.

Chizmada ko'rinib turibdiki, bunday sonlar ikkita: birinchi son 0 dan 3 birlik chapda joylashgan. $x_1 = 0 - 3 = -3$.

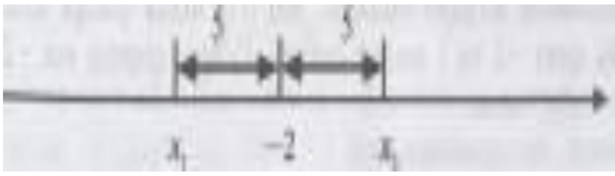
Ikkinchi son esa 0 dan 3 birlik o'ngda joylashgan: $x_2 = 0 + 3 = 3$.

Demak, $|x| = 3$tenglamaning ildizlari $x_1 = 3;\ x_2 = -3$ bo'ladi.

2 – misol. $|x+2| = 5$ tenglamaning yechimini toping.

$|x+2| = |x-(-2)|$ ifoda x va – 2 sonlari orasidagi masofani bildiradi.

Bu tenglamani yechish uchun -2 va qanday sonlar orasidagi masofa 5 ga teng degan savolga javob topishimiz kerak.



Chizmadan ko'rinib turibdiki, biz izlayotgan sonlar 2 ta:
$x_1 = -2 - 5 = -7;\ \ x_2 = -2 + 5 = 3$

Demak, $|x+2| = 5$tenglamani ildizlari $x_1 = -7;\ \ x_2 = 3$.

3 – misol. $|4x-3| = 5$tenglamaning yechimini toping.

Biz bu misolni ishlashdan oldin shakl almashtiramiz.

$$|4x-3| = \left|4\left(x-\frac{3}{4}\right)\right| = |4| \cdot \left|x-\frac{3}{4}\right| = 4\left|x-\frac{3}{4}\right|$$

Demak, $|4x-3| = 5$tenglama endi $4\left|x-\frac{3}{4}\right| = 5$ko'rinishga ega bo'ladi. $\left|x-\frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4}$ tenglamani yechamiz. Bundan oldingi misolga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz. $x_1 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2};\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$ ni hosil qilamiz.

Demak, $|4x-3| = 5$tenglamaning ildizlari $x_1 = -\frac{1}{2}$va $x_2 = 2$bo'ladi.

4 – misol. $|x+2| + |x-1| = 5$ tenglamani yeching.

$|x+2|$ ko'rinish x va – 2 sonlari orasidagi masofa; $|x-1|$ ko'rinish x va 1 sonlari orasidagi masofa. Demak, shunday son topishimiz kerakki, shu sondan – 2 gacha va 1 gacha bo'lgan masofalar yig'indisi 5 ga teng bo'lsin.

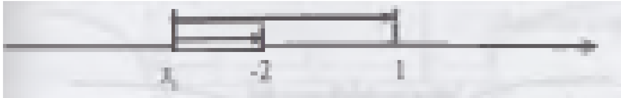
Chizmadan ko'rinib turibdiki, son o'qi uchta qismga ajratilgan. Birinchi qism – 2 gacha 1 sonlari oralig'i. qolgan qismlari esa – 2 va 1 sonlari oralig'i emas.

Demak, biz izlayotgan son.

a) – 2 va 1 sonlar oralig'ida bo'lishi mumkin deb olamiz.

Bu holda biz izlayotgan sondan – 2 va 1 gacha bo’lgan masofalar yig’indisi 3 ga teng bo’ladi. Demak, bu oraliqda yechim yo’q.

b) – 2 va 1 sonlar oralig’ida emas deb olamiz.



Bu holda $|x_1+2|=\alpha \Rightarrow \begin{cases} |x+2|=\alpha \\ |x-1|=3+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+\alpha+\alpha=5 \\ 3+2\alpha=5 \end{cases}$ bundan $\alpha=1$ kelib chiqadi.

Demak, biz izlanayotgan son – 2 dan 1 birlik chapga joylashgan:

$x_1=-2-1=-3$

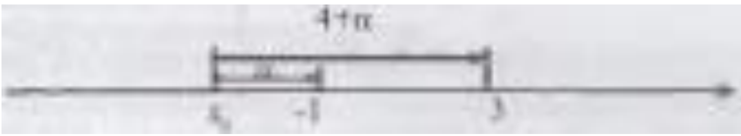
c) Shunday usul bilan 1dan 1birlik o’ngda ikkinchi ildizini topamiz:

$x_2=1+1=2$.

Mana shu o’rinda quyidagi xulosaga kelamiz.

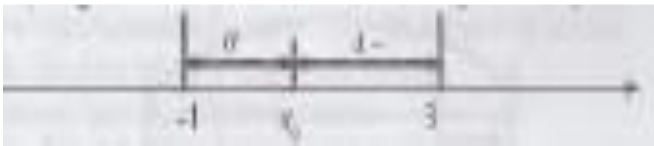
$|x-a|+|x-b|=c$ tenglama $c>a-b$ bo’lgandagina yechimga ega.

5 – misol. $|x+1|-|x-3|=2$ tenglamani yeching.



Chizmadan ko’rinib turibdiki, biz izlayotgan son – 1 va 3 sonlar oralig’ida joylashmagan bo’lsa, masofalar ayirmasi doimo 4 ga teng bo’ladi. Demak, - 1 va 3 sonlari oralig’idan tashqarida tenglamaning ildizlari yo’q.

Demak, tenglama ildizlari – 1 va 3 sonlari oraliqdan izlaymiz.



$\alpha-(4-\alpha)=2;\ 2\alpha-4=2;\ 2\alpha=6;\ \alpha=3$.

Demak, tenglamaning ildizi – 1 dan 3 birlik o’ngda joylashgan: $x_0=-1+3=2$.

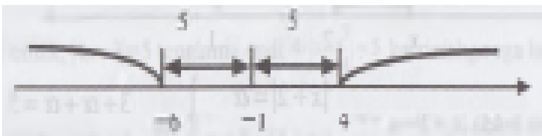
Shu o’rinda yana bir xulosa qilish mumkin.

$|x-a|-|x-b|=c$ tenglama $-|a-b|\le c\le|a-b|$ bo’lgandagina yechimga ega bo’ladi.

2) Modul qatnashgan tengsizliklarni son o’qida tasvirlanishi.

6 – misol. $|x+1|>5$ tengsizlikni yeching.

$|x+1|>5$ tengsizlik bizga x va – 1 gacha bo’lgan masofa 5 dan katta ekanligini bildiradi.

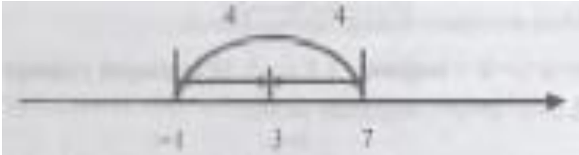


Chizmadan ko'rinib turibdiki, biz izlayotgan sonlar $(-\infty;-6)\cup(4;\infty)$ oraliqlarda joylashgan.

Demak, $|x+1|>5$ tengsizlikning yechimi $(-\infty;-6)\cup(4;\infty)$ bo'ladi.

7 – misol. $|x-3|<4$ tengsizlikni yeching.

$|x-3|<4$ tengsizlik x va 3 sonlar orasidagi masofa 4 dan kichik ekanligini bildiradi.

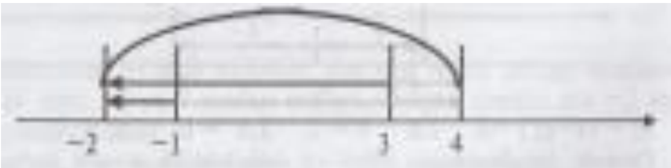


Chizmadan ko'rinib turibdiki, biz izlayotgan sonlar $(-1;7)$ oralig'ida joylashgan.

Demak, $|x-3|<4$ tengsizlikning yechimi $x\in(-1;7)$ bo'ladi.

8 – misol. $|x+1|+|x-3|<6$ tengsizlikni yeching.

$|x+1|+|x-3|<6$ tengsizlik x sonidan – 1 va 3 gacha bo'lgan masofalar yig'indisi 6 dan kichik ekanligini bildiradi. Tengsizliklar yechish mobaynida masofalar yig'indisi 6 ga teng sonlarni topishni o'rgandik. Shu sonlarni son o'qida tasvirlaymiz.

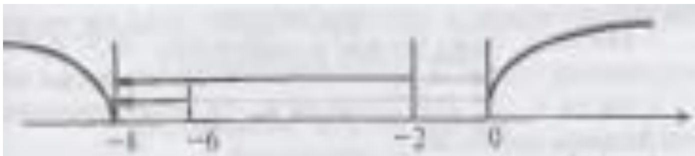


Chizmadan ko'rinib turibdiki, - 1 va 3 sonlargacha bo'lgan masofalar yig'indisi 6 dan kichik bo'lishi uchun izlayotgan sonlar $(-2;4)$ oraliqda joylashgan bo'lishi shart.

Demak, $|x+1|+|x-3|<6$ tengsizlikning yechimi $x\in(-2;4)$ bo'ladi.

9 – misol. $|x+2|+|x+6|>8$ tengsizlikni yeching.

- 2 va – 6 sonlarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi 8 ga teng sonlarni topamiz.



Chizmadan ko'rinib turibdiki, masofalar yig'indisi 8 dan katta bo'lishi uchun biz izlayotgan sonlar $(-\infty;-8)\cup(0;\infty)$ oraliqlarda bo'lishi kerak.

Demak, $|x+2|+|x+6|>8$ tengsizlikning yechimi $x\in(-\infty;-8)\cup(0;\infty)$ bo'ladi.

10 – misol. $|x-3|+|x-9|<5$ tengsizlikni yeching.

$|x-a|+|x-b|\geq|a-b|$ bo'lganligi uchun $|x-3|+|x-9|\geq 6$ bo'lishi shart. Demak

$|x-3|+|x-9|<5$ tengsizlik yechimga ega emas.

3) Modulli tenglama va tengsizliklardan kelib chiqqan natijalar.

1 – teorama. $|x-a|+|x-b|=c$ tenglama ($a<b$)

a) $c<|a-b|$ bo'lganda yechimga ega emas.

b) $c=|a-b|$ bo'lganda $[a;b]$ intervaldagi barcha qiymatlar yechim bo'ladi.

c) $c>|a-b|$ bo'lganda yechim $[a;b]$ intervaldan tashqarida bo'ladi va $x_1=\frac{a+b-c}{2}$ va $x_2=\frac{a+b+c}{2}$ topiladi.

11 – misol. $|x-2|+|x+4|=8$ tenglamani yeching.

$|-4-2|<8$ bo'lgani uchun 1 – teoremaga ko'ra $x_1=\frac{-4+2-8}{2}=-5$ va $x_2=\frac{-4+2+8}{2}=3$.

2 – teorema. $|x-a|+|x-b|+|x-c|=d$; $(a\le b\le c)$ tenglamaning ildizlari $[a;c]$ intervaldan tashqarida mavjud bo'lsa, $x_1=\frac{a+b+c-d}{3}$ va $x_2=\frac{a+b+c+d}{3}$ qiymatlardan biriga yoki ikkalasiga teng bo'ladi.

12 – misol. $2|x-3|+|x+4|=13$ tenglamani yeching.

Tenglamani quyidagidek almashtiramiz: $|x-3|+|x-3|+|x+4|=13$.

2 – teoremaga ko'ra tenglamaning ildizlari $[-4;3]$ intervaldan tashqarida $x_1=\frac{3+3-4-13}{3}=-\frac{11}{3}$ va $x_2=\frac{3+3-4+13}{3}=5$ bo'ladi. Tenglama ildizi sifatida $x=5$ ni olinadi. Endi tenglama ildizlarini $[-4;3]$ intervaldan izlaylik. Biz bilamizki, $|x+4|+|x-3|=7$ bo'ladi. Shu sababli tenglama $|x-3|=6$ ko'rinishga keladi. Bundan esa $x_2=3-6=-3$; $x_3=3+6=9$ ga ega bo'lamiz. Lekin bu qiymatlardan faqat $x_2=-3$ ni olishimiz mumkin.

Demak, tenglama ildizlari $x_1=5$ va $x_2=-3$ ekan.

Yuqoridagi ikki teoremaga ko'ra quyidagi umumiy teoremani keltirish mumkin.

3 – teorema. $|x-a_1|+|x-a_2|+...+|x-a_n|=c$ $(a_1<a_2<...<a_n)$ tenglamaning ildizlari $[a_1;a_n]$ intervaldan tashqarida mavjud bo'lsa, $x_1=\frac{a_1+a_2+...+a_n-c}{n}$ va $x_2=\frac{a_1+a_2+...+a_n+c}{n}$ qiymatlarning biriga yoki ikkalasiga teng bo'ladi.

4 – teorema. $|x-b|-|x-a|=c$ tenglama $(a<b)$.

a) $|c|>|a-b|$ bo'lganda yechimga ega emas.

b) $c=-|a-b|$ bo'l

c) $c=-|a-b|$ bo'lganda, yechim $[b;\infty)$ intervaldan iborat bo'ladi.

d) $|c|<|a-b|$ bo'lganda, yechim $(a;b)$ intervalda mavjud va yagona va $x_1=\frac{b+a-c}{2}$.

5 – teorema. $|x-b|-|x-a|>c$ tengsizlik $(a<b)$

a) $c>|a-b|$ bo'lganda yechimga ega emas.

b) $c<-|a-b|$ bo'lganda, yechim $(-\infty;+\infty)$ bo'ladi.

c) $|c|\leq|a-b|$ bo'lganda, yechim $(-\infty;x_0)$ bo'ladi.

6 – teorema. $|x-a|+|x-b|>c$ tengsizlik $(a<b)$.

a) $c<|a-b|$ bo'lganda, yechim $(-\infty;\infty)$.

b) $c>|a-b|$ bo'lganda, yechim $(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$.

7 – teorema. $|x-a|+|x-b|<c$ tengsizlik $(a<b)$.

a) $c<|a-b|$ bo'lganda, yechimga ega emas.

b) $c>|a-b|$ bo'lganda, yechim $(x_1;x_2)$.

8 – teorema. $|x-b|-|x-a|<c$ tengsizlik $(a<b)$.

a) $c<-|a-b|$ bo'lganda yechimga ega emas.

b) $c>|a-b|$ bo'lganda, yechim $(-\infty;\infty)$.

c) $|c|<|a-b|$ bo'lganda yechim $(x_0;\infty)$.

Ko'rinib turibdiki ko'rilgan teoremalarga asosan quyidagi ikki xulosani keltiramiz:

1. $n|x-a|+k|x-b|=c$ tenglamaning (n,k - natural sonlar, $a<b$) $(a;b)$ intervaldan tashqarida yechimlari mavjud bo'lsa:

$x_1=\frac{na+kb-c}{n+k}$; $x_2=\frac{na+kb+c}{n+k}$ qiymatlardan biri yoki ikkalasi tenglamaning ildizi bo'ladi.

2. $n|x-a|-k|x-b|=c$ tenglamaning (n,k - natural sonlar, $a<b$) $(a;b)$ intervalda yechimi mavjud bo'lsa, $x_0=\frac{na+kb+c}{n+k}$ qiymat tenglamaning ildizi bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Maxmudova D, Do'stmurodova G "Qiziqarli matematika va olimpiada masalalari”Chirchiq 2000 y

2.B.A.Shoimqulov, R.M.Madrahimov, N.B.Kamolov “Talabalarning matematikadan olimpiada masalalari” Toshkent – 2013.

3.Ismoilov U “Matematikadan olimpiada masalalari” Toshkent “Yangi avlod” nashriyoti 2007-y

4. Artur Engel Problem-Solving Strategies. 1998 Springer-Verlag New York

5. Лопщиц А.М. Функциональные уравнения.-Квант,1970 г. №1-2,30-35 с.

6. Котельников П.М. О функциональных уравнениях, определяющих тригонометрические функции. Математика в школе , 1951, №2, 1-12 с.

7. Ясинский В.А. Олимпиадна математика, функциональни ривнення.Х.: Основа, 2005.

8. Андреев А.А. и др. Функциональные уравнения.-Самара: В мире науки,1999.

9. Paul Vaderlind. Functional Equations for The Beginners. Stockholm University, 2005.