KLASSIK TENGSIZLIKLERDI DÁLILLEWDE TRANS TEŃSIZLIGIN QOLLAW

Shamenova Juldiz
Qoraqalpog'iston Respublikasi Nukus tumani
7-sonli maktab matematika fanini o'qituvchisi

Rezyume: Ushbu maqolada , klassik tengsizlikni aniqlashda trans tengsizlikni aniqlashning bir nechta namunalari ko'rsatiladi.

Резюме: В этой статье мы покажем, как решать классические неравенства на нескольких примерах.

Summary: In this paper, we show how to solve classical inequalities using a few examples.

Gilt so'zlar: tengsizliklar, algebraik tengsizliklar, Kooshi-Bunyakovskiy tengsizliklari, klassik tengsizliklar, Shebichev tengsizligi.

Ключевые слова: Неравенство, алгебрайческие неравенство, неравенство Коши-Буняковского, классические неравенства, неравенство Чебышева.

Key words: inequalities, algebraic inequalities, Koshi-Bunyakovskiy inequalities, classical inequalities, Chebishev inequality.

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \ge a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \ge a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1 \qquad (1)$$

Barcha $a_1,\ldots,a_n$ sonlar uchin (1) tengsizlikning zarur hollari haqida keltirib o'tamiz

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_n} \ge n \qquad (2)$$

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \ge a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \qquad (3)$$

Bu holda n-ixtiyoriy natural son, $(b_1,\ldots b_n)-a_1,\ldots,a_n$ sonlarning ixtiyoriy o'rin almashtirilishi.

1-misol (Ortacha ma'nolar haqida Koshi tengsizligi.).

$x_1,x_2,\ldots x_n$ ong sonlar uchin

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1,x_2,\ldots x_n}.$$

tengsizlik o'rinli, shu bilan birga tenglik $x_1=x_2=\ldots=x_n$ holda bajariladi.

Yechimi. $G=\sqrt[n]{x_1,x_2,\ldots x_n}$, $a_1=\frac{x_1}{G}$, $a_2=\frac{x_1x_2}{G^2},\ldots\ a_n=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{G^n}=1$ bo'lsin.

(2) tengsizlikka ega bolamiz. Tenglik bajarilishi uchin $a_1=a_2=\ldots=a_n$ yoki $x_1=x_2=\ldots=x_n$ bolishi va yetarli.

2-misol. (Orta geometrik va garmonik ma'nolar orasidagi tengsizlik) $x_1, x_2, \ldots x_n$ ong sonlar uchin

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}}$$

tengsizlik orinli, shu bilan birga tenglik $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ bo'lganida bajariladi.

Yechimi. Oldinggi misoldagi $G, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlarin qaraymiz. (2) tengsizlikka ko'ra

$$\frac{n}{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1}} \leq G$$

tengsizlikka teng ekvivalent bolgani shu

$$n \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots \frac{a_n}{a_1} = \frac{G}{x_1} + \frac{G}{x_2} + \ldots + \frac{G}{x_n}$$

Tengsizlikka ega bolamiz.

Tenglik bajarilishi uchin $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ yani $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ bo'lishi zarur.

3-misol.(Orta kvadratik va Orta arifmetik ma'nolar orasidagi tengsizlik)

Ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots x_n$ sonlar uchın

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

tenglik o'rinli, shu bilan birga tenglik $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ bo'lganida bajariladi.

Yechimi.

(3) tengsizlikka qarata

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 \geq x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_n x_1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 \geq x_1 x_3 + x_2 x_4 + \ldots + x_n x_2$$

……………………...…………………….

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 \geq x_1 x_n + x_2 x_1 + \ldots + x_n x_{n-1}$$

ega bo'lamiz.

Ushbu tengsizliklarning barchasi

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ tenglik bilan qoshib, nátiyjada

$n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2) = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)^2$ tengsizlikni paydo etamiz .

4-misol. (Koshi-Bunyakovskiy-Shvarts tengsizlik)

n sonni ko'rsatish ikki $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots b_n$ ketma-ketlik berilgan bolsa. U holda

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

tengsizlik o'rinli. Tenglik hechqanday bir o'zgarmas k son uchın $a_i = kb_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ bo'lganida tenglik bajariladi.

Yechich. Agar $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ yoki $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ bo'lsa, u holda tenglik bajariladi. Shuning uchin

$P=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}, Q=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$

sonlar noldan farihli dep hisoblaymiz.

Pastta $x_1, x_2, \ldots x_n$ ketma-ketlikni qaraymiz:

$$x_i=\frac{a_i}{P},\ x_{n+1}=\frac{b_i}{Q},\ \ i=1,2,\ldots,n.$$

U holda

$$2=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{P^2}+\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{Q^2}=x_1^2+x_2^2+\ldots x_{2n}^2$$

ga ega.

(3) tenglikka kora

$$x_1^2+x_2^2+\ldots x_{2n}^2$$
$$\geq x_1x_{n+1}+x_2x_{n+2}+\ldots+x_nx_{2n}+x_{n+1}x_1+x_{n+2}x_2+\ldots+x_{2n}x_n$$
$$=\frac{2\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)}{PQ}$$

ga egamiz. Natiyjada

$$1\geq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{PQ}$$

tengsizlikni paydo etamiz.

Eslatma, tenglik $x_i=\dfrac{P}{Q},\ i=1,2,\ldots,n.$ shart bajarilganda bo’ladi. Bu shart bo’lsa $x_i=x_{n+1},\ i=1,2,\ldots,n$ shartiga ekvivalent.

5-misol. (Chebishev tengsizligi).

n sonnan iborat ikki $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots b_n$ ketma-ketlik berilgan bo’lsin. Tahminiy $a_1\geq a_2\geq\ldots\ldots\geq a_n$ shart bajarilsin.

U holda

$$a)\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\leq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$$

Agar $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$

$$b)\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\geq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$$

Agar $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$

Da’lil.

(5) tengsizlikka ko’ra

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1b_1+a_2b_3+\ldots+a_nb_1$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1b_1+a_2b_4+\ldots+a_nb_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1b_n+a_2b_1+\ldots+a_nb_{n-1}$$

shartga ega bo’lamiz, ularni qoship

$$n\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)\geq(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

yoki

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\leq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$$

ni paydo etamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Ismailov Sh., Qo’chqorov A., Abdurahmonov B. Tengsizliklar-I. Isbotlashning klassik usullari // Toshkent, 2008.

2. Kudaybergenov K.K., Nasirov P.B., Alauadinov A.K., Xudaybergenov M. K. Olimpiada ma’seleleri // Metodikali’q qo‘llanba. No’kis: 2016. – 56 b.

3. Madrahimov R., Kamalov N., Yusupov B., Bekmetova S. Talabalar matematika olimpiadasi masalalari. // Uslubiy qo‘llanma. Urganch, 2014. 208 bet.