АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ 3-Й СТЕПЕНИ

Т. Р. Суяров
Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
Email: t.r.suyarov@buxdu.uz.

Аннотации. Статье ориентировано на широкий круг читателей: абитуриентов, школьников, готовящихся к математическим олимпиадам, студентов первого курса, а также школьных учителей математики, особенно преподающих в физико-математических классах. Изложенный материал будет полезен и студентам младших курсов, поскольку не вызывает сомнения тот факт, что многим студентам, вплоть до старших курсов не дают успешно учиться пробелы в знаниях по элементарной математике

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, теоремы Безу, замечательного тождества

1.Постановка задачи

Рассмотрим алгебраическое уравнение, записанное в виде:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \mathbb{C} \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 . \qquad (1.1)$$

Перейдем к процедуре определения рациональных корней целого алгебраического уравнения (1.1), у которого коэффициент при старшей степени неизвестной $a_0 \neq 1$. В этом случае простое деление на этот коэффициент всего уравнения с целью сведения его к приведенному и последующему применению рассмотренной процедуры не приведет к цели, поскольку коэффициенты уравнения становятся дробными, что нарушает условия из теоремы Безу.

Умножим обе части уравнения (1.2) на a_0^{n-1} :

$$a_0^nx^n + a_1a_0^{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}a_0^{n-1}x + a_0^{n-1}a_n = 0. \qquad (1.2)$$

Полученное уравнение после введения новой переменной $y = a_0x$ принимает вид приведенного

$$y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}a_0^{n-2}y + a_0^{n-1}a_n = 0. \qquad (1.3)$$

Если исходное уравнение (1.1) имело рациональные корни, то полученное в терминах новой переменной y приведенное уравнение имеет целые корни, которые, как и ранее, следует искать среди делителей свободного члена. Решив приведенное уравнение, возвращаемся к исходной переменной $x = \frac{y}{a_0}$.

Пример 1.1. Решить уравнение

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Решение. Умножаем обе части уравнения на 3^2. Имеем:

$$3^3x^3 - 7 \cdot 3^2x^2 + 15 \cdot 3x - 9 = 0$$

Обозначим $y = 3x$ и запишем уравнение в виде

$$y^3 - 7y^2 + 15y - 9 = 0$$

Целые корни ищем среди делителей числа 9 , т.е. среди чисел $\pm 1; \pm 3$. Имеем $y_1 = 1$. Находим частное от деления многочлена $y^3 - 7y^2 + 15y - 9$ на $y - 1$. Таким образом, после разложения на сомножители решаем уравнение

$$(y - 1)(y - 3)^2 = 0$$

которое имеет корни $y_1 = 1, y_{1,2} = 3$. Возвращаемся к переменной x и получаем решение исходного уравнения $x_1 = \frac{1}{3}, x_{1,2} = 1$.

В более сложных случаях, когда методы, предлагаемые выше, не приводят к цели, может быть полезна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) $a_0, a_1, \dots, a_n$ являются целыми числами. Если несократимая дробь $x = \frac{p}{q}$ является корнем уравнения (1.1), то число p является делителем свободного члена a_n, а число q – делителем старшего коэффициента a_0.

2. Применение формул сокращенного умножения

Довольно эффективно применяются при разложении многочлена на множители формулы сокращенного умножения.

В сложных алгебраических уравнениях зачастую очень трудно провести удачную группировку слагаемых. В этом случае, возможно, уравнение имеет специфическую структуру, позволяющую провести либо специальную группировку слагаемых, либо специальную замену переменных (об этом речь будет идти ниже).

Теорема 2. *Если в уравнении* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ *выполняется следующие зависимости между коэффициентами*

$$a + b = b + c + d = d + e, \tag{2.1}$$

то левая часть уравнения раскладывается на множители, одним из которых будет $x^2 - x + 1$, *а второй находится делением левой части уравнения на* $x^2 - x + 1$.

Пример 2.1. Решить уравнение

$$2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x - 3 = 0.$$

Решение. Проверим выполнение условий теоремы 2. В нашем уравнении коэффициенты при неизвестных равны

$$a = 2, b = 1, c = -4, d = 6, e = -3.$$

Соотношение (2.1) из теоремы 3 выполняется, поэтому левая часть уравнения нацело делится на трехчлен $x^2 - x + 1$. Производим процедуру деления уголком. Тогда уравнение примет вид:

$$(x^2 - x + 1)(2x^2 + 3x - 3) = 0$$

Первый сомножитель не имеет действительных корней, а второй сомножитель имеет два корня.

3. Применение общих формул и методов решения рациональных уравнений 3-й.

Переходим к обзору наиболее общих методов решения целых алгебраических уравнений, большинство которых выходит за рамки школьной программы. Начнем с т.н. «замечательного тождества», или, как его еще называют, формулы разложения суммы трех кубов. Она имеет следующий вид

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)} \quad \mathbf{(3.1)}$$

Приведем доказательство этого равенства, поскольку оно методически полезно. Разложим левую часть формулы (3.1) на множители так, чтобы выделить сомножитель $\boldsymbol{a + b + c}$, входящий в правую часть. Воспользовавшись известными разложениями кубических выражений (формулы (3.1), имеем

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^3 + 3ab(a + b) + b^3) - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc = \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc = ((a + b)^3 + c^3) - 3ab(a + b) - 3abc = \\ &= (a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) = \\ &= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = \\ &= (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc). \end{aligned}$$

Формула (3.1) доказана. Заметим, что «замечательное тождество» может иметь различные применения в элементарной математике. В частности при решении приведенных кубических уравнений вида $x^3+qx+r=0$, при выяснении вопросов о равносильности уравнений, содержащих кубические радикалы и т.д.

Пример 3.1. Решить уравнение

$$2x^3-6x+5=0$$

Решение. Данное уравнение рациональных корней не имеет, в чем можно убедиться, проверив условия теоремы 2. Попытки выделения полного куба суммы или разности двух выражений займут много времени и также к цели не приведут. Попробуем применить формулу (3.1). С этой целью представим левую часть уравнения в виде левой части формулы (3.1):

$$x^3-3x+\frac{5}{2}=0\Rightarrow x^3+2+\frac{1}{2}-3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}x=0\Rightarrow$$
$$x^3+(\sqrt[3]{2})^3+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3-3x\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=0$$

Цель достигнута. Теперь можно применить «замечательное тождество» и разложить левую часть уравнения на множители. Имеем

$$\left(x+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{2}\cdot x-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot x-1\right)=0\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=0 \\ x^2-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cdot x+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1=0 \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности дает корень $x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, а второе представляет собой квадратное уравнение, которое не имеет действительных решений. Для доказательства этого утверждения вычислим его дискриминант:

$$D=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2-4\cdot\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-1\right)=-3\cdot\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+6$$
$$=3\cdot\left(2-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$$

Рассмотрим выражение в скобках и убедимся, что оно отрицательно, т.е. докажем неравенство

$$2<\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Поскольку обе части неравенства положительны, возведем их в квадрат:

$$4<\sqrt[3]{16}+2+\sqrt[3]{\frac{1}{16}},\ \text{т. е.},\ 2<\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

Заключительное неравенство является очевидным, поскольку $2=\sqrt[4]{16}<\sqrt[3]{16}$. Производя все действия в обратном порядке, приходим к доказательству исходного неравенства.

Ответ: $x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

REFERENCE

[1] Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1977. – 832 с.

[2] Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Москва: Просвещение, 1991. – 352 с.

[3] Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа В / под ред. М. И. Сканави. – Москва : Мир и образование, 2003. – 608 с.

[4] Улитин Г.М., Мироненко Л.П. Математика. Методическое пособие для абитуриентов. – Донецк: РВА ДонНТУ, 2004. – 330с.

[5] Зарубежные математические олимпиады / С.В. Конягин [и др.] – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 416с.