УСТОЙЧИВЫЕ АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Файзуллаев Дедахужа Зокиржон угли *Ассистент,*
Наманганский инженерно-технологический институт
Телефон: (+998 94) 008-10-93
e-mail: dedakhujafayzullayev@gmail.com

Аннотация: *В работе рассматривается стабилизация процедуры обращения матриц при оценивании состояния стохастических объектов управления и повысить точность определения истинной оценки вектора состояния при возмущении параметров объекта и наблюдателя.*

Ключевые слова: *фильтрация, фильтр Калмана, возмущения, матрица, оценивание, стохастическое уравнение.*

Проблема оценивания реализаций случайных процессов, содержащих некоторую полезную информацию и протекающих в присутствии различного рода помех, возникает во многих областях науки и техники. В зависимости от назначения разнообразные технические системы передачи или извлечения информации функционируют в разных условиях и к ним предъявляются различные требования [1-2]. Если информационные параметры полезного сигнала изменяются на отрезке наблюдения, то задача оценки параметров также трансформируется в задачу фильтрации. При решении этой задачи необходимо получить оценку реализации непосредственно ненаблюдаемого случайного процесса на основании наблюдения реализации случайного процесса и известной априорной информации. Результатом решения задач фильтрации являются оптимальные правила оценок случайных процессов и соответствующие им структурные схемы оптимальных устройств оценивания, а также потенциальные характеристики качества их функционирования [3]. Заметим, что при решении разнообразных задач фильтрации весьма эффективными оказывается концепции условно-гауссовской фильтрации

При решении разнообразных задач синтеза систем управления динамическими объектами возникает проблема оценивания вектора состояния управляемого объекта на основе фильтра калмановского типа [4]. Важность этой проблемы состоит в том, что формирование управляющих воздействий в соответствии с принципом достоверной эквивалентности производится именно на основе вектора состояния объекта.

Рассмотрим объект управления, описываемый следующими уравнениями состояния и наблюдения

$$x_i = A_{i/i-1}x_{i-1} + w_i,\quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$y_i = C_i x_i + v_i, \tag{2}$$

где x_i – n-мерный вектор состояния объекта в дискретный момент времени i; $A_{i/i-1}$ – переходная матрица состояний размерностью $n \times n$; w_i – n-мерный вектора белых гауссовских шумов объекта с известной матрицей интенсивностей $Q_i\delta_{ij}$ и нулевым вектором математического ожидания; y_i – m-мерный вектор измерений; C_i-матрица измерений размерностью $m \times n$; v_i – m-мерный вектор белых гауссовских помех измерений с нулевым вектором математического ожидания и матрицей интенсивностей $R_i\delta_{ij}$; δ_{ij} – дельта-функция Кронекера.

Для подавляющего большинства практических задач обычно требуется обеспечить возможно более высокую точность оценивания вектора состояния, в том числе и при наличии тех или иных ограничений, то в любом случае для заданных моделей векторов состояния и наблюдения сначала целесообразно синтезировать оптимальные или квазиоптимальные алгоритмы обработки информации [4].

Для оценивания вектора состояния объекта (1), (2) при точном знании параметров объекта, матриц Q_i и R_i обычно используется классической фильтр Калмана:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{x}_{i+1} = A_{i+1/i}\hat{x}_i + K_{i+1}\left(y_{i+1} - C_{i+1}A_{i+1/i}\hat{x}_i\right),\ \ \hat{x}_0 = M\left(x_0\right); \\ &K_{i+1} = P_{i+1/i}C_{i+1}^T(C_{i+1}P_{i+1/i}C_{i+1}^T + R_{i+1})^{-1}; \\ &P_{i+1/i} = A_{i+1/i}P_iA_{i+1/i}^T + Q_{i+1}; \\ &P_{i+1} = \left(I - K_{i+1}C_{i+1}\right)P_{i+1/i},\ \ P_0 = M\left\{\left(x_0 - \hat{x}_0\right)\left(x_0 - \hat{x}_0\right)^T\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

обеспечивающий минимум среднеквадратической ошибки фильтрации.

Возмущения параметров объекта и наблюдателя вектора состояния, неизбежные при функционировании реальных систем, приводят к принципиальной невозможности обеспечения оптимальной оценки состояния линейной системы фильтром (3). До настоящего времени были предприняты многочисленные попытки решения этой проблемы путем определения допустимых границ возмущения калмановской оценки или численным моделированием процесса оценивания вектора состояния конкретного объекта [5]. Такие подходы не позволяют решить главной задачи возмущенной фильтрации – оптимального в среднеквадратическом текущего оценивания ошибок калмановского фильтра, обусловленных его параметрическими возмущениями. В настоящее время рассмотрены варианты определения лишь верхней границы возмущения калмановской оценки, обусловленной «неопределенностью априорной неопределенности». Таким образом, решение задачи фильтрации параметрических возмущений фильтра Калмана, т.е., оптимального текущего оценивания ошибок калмановской фильтрации из-за погрешностей в определении параметров фильтра и его начальных условий, представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. В дальнейшем при решении поставленной задачи используется математический аппарат исследования возмущений многомерных линейных систем, предложенный в.

Используя уравнение ошибки, представленное в [5], запишем уравнения для ошибки возмущенного фильтра (3.3) и случайной составляющей $\delta P_i^{(v)}$, функционально связанной с указанными шумами:

$$\delta\hat{x}_{i+1} = L_0\delta\hat{x}_i + L_1\delta A_{i+1}^{(v)} + L_2\delta C_{i+1}^{(v)} + L_3\delta Q_{i+1}^{(v)} + L_4\delta R_{i+1}^{(v)} + L_5\delta P_i^{(v)}. \quad (4)$$

$$\delta P_{i+1}^{(v)} = N_0\delta P_i^{(v)} + N_1\delta A_{i+1}^{(v)} + N_2\delta C_{i+1}^{(v)} + N_3\delta Q_{i+1}^{(v)} + N_4\delta R_{i+1}^{(v)}\ , \quad (5)$$

где $\delta P_0^{(v)}$ - вектор ошибок определения элементов матрицы априорной ковариации; алгоритмы определения матриц $L_0 - L_5$, $N_0 - N_4$, в выражениях (4) и (5) приводятся в [6].

Истинная оценка x_{i+1}^0 вектора состояния объекта в текущий момент времени может быть определена как

$$x_{i+1}^0 = \hat{x}_{i+1} - \delta\hat{x}_{i+1},$$

где $\delta\hat{x}_i$ – возмущения вектора состояния объекта.

Уравнение (4) позволяет сформировать стохастическое уравнение истинной оценки в следующем виде:

$$x_{i+1}^0 = L_0x_i^0 + K_{i+1}y_{i+1} - L_1\delta A_{i+1}^{(v)} - L_2\delta C_{i+1}^{(v)} - L_3\delta Q_{i+1}^{(v)} - L_4\delta R_{i+1}^{(v)} - L_5\delta P_i^{(v)},\quad x_0^0 = \hat{x}_0 - \delta\hat{x}_0 \quad (6)$$

Исходя из изложенного, определим далее задачу возмущенной фильтрации как задачу текущей оценки векторов (4) – (6), используя в качестве сигнала наблюдателя за оцениваемым расширенным вектором возмущенную калмановскую оценку $\hat{x}_i$.

Уравнение расширенного оцениваемого вектора в этом случае имеет вид

$$Z_{i+1} = G_L \cdot Z_i + G_N \cdot \left[\left(\delta A_{i+1}^{(v)}\right)^T \vdots \left(\delta C_{i+1}^{(v)}\right)^T \vdots \left(\delta Q_{i+1}^{(v)}\right)^T \vdots \left(\delta R_{i+1}^{(v)}\right)^T \right]^T + G_c,$$

где

$$Z_i = \begin{bmatrix} x_i^0 \\ \hdashline \delta\hat{x}_i \\ \hdashline \delta P_i^{(v)} \end{bmatrix};\quad G_L = \left[\begin{array}{c:c:c} L_0 & 0 & -L_5 \\ \hdashline 0 & L_0 & L_5 \\ \hdashline 0 & 0 & N_0 \end{array}\right];\quad G_N = \begin{bmatrix} -G \\ \hdashline G \\ \hdashline G_1 \end{bmatrix};\quad G_c = \begin{bmatrix} K_{i+1}y_{i+1} \\ \hdashline 0 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix};$$

$$G = [L_1 \vdots L_2 \vdots L_3 \vdots L_4],\quad G_1 = [N_1 \vdots N_2 \vdots N_3 \vdots N_4].$$

Учитывая, что уравнение выходного сигнала калмановского измерителя можно представить как

$$y_i = C_i(\hat{x}_i + \Delta_i) + v_i,$$

где Δ_i – вектор ошибок оптимальной оценки вектора состояния невозмущенной системы объект-наблюдатель, уравнение наблюдения можно записать следующим образом [7]:

$$\hat{x}_{i+1} = A_{i+1/i}\left(x_i^0 + \delta\hat{x}_i\right) + K_{i+1}\left(H_{i+1}A_{i+1/i}\Delta_i + C_{i+1}w_{i+1} + v_{i+1}\right).$$

Функциональный характер данного уравнения позволяет получить уравнения искомого фильтра в форме условно-гауссовского фильтра непосредственно из доказательства основной теоремы условно-гауссовской фильтрации. Считая выполненными допущения, положенные в основу теории условно-гауссовской фильтрации [8], на основе [6] можно записать следующий алгоритм оценивания стохастического объекта при наличии параметрических возмущений:

$$\hat{Z}_{i+1} = G_c + G_L\hat{Z}_i + \left(G_L J_i A_c^T\right)F^+\left(\hat{x}_{i+1} - A_c\hat{Z}_i\right), \tag{7}$$

$$J_{i+1} = G_L J_i G_L^T + G_N D_\xi G_N^T - G_L J_i A_c^T F^+ A_c J_i G_L^T, \tag{8}$$

$$\hat{Z}_0 = M(Z_0) = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \left[\begin{array}{c:c:c} D_{\delta x} & D_{\delta x} & 0 \\ \hdashline D_{\delta x} & D_{\delta x} & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{0} & D_{\delta P} \end{array}\right],$$

$$F = E_p + A_c J_i A_c^T, \tag{9}$$

где

$$D_\xi = \left[\begin{array}{c:c:c:c} D_{A_{i+1}} & & & 0 \\ \hdashline & D_{H_{i+1}} & & \\ \hdashline & & D_{Q_{i+1}} & \\ \hdashline 0 & & & D_{R_{i+1}} \end{array}\right] \cdot \delta_{(i+1,\,j+1)};$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes A_{i+1/i};$$

$$E_p = \left[K_{i+1}C_{i+1}A_{i+1/i} \;\vdots\; K_{i+1}C_{i+1} \;\vdots\; K_{i+1}\right] \left[\begin{array}{c:c:c} P_{i/i-1} & & 0 \\ \hdashline & Q_{i+1} & \\ \hdashline 0 & & R_{i+1} \end{array}\right] \left[K_{i+1}C_{i+1}A_{i+1/i} \;\vdots\; K_{i+1}C_{i+1} \;\vdots\; K_{i+1}\right]^T,$$

где $D_{\delta x}$ – ковариационная матрица ошибок определения вектора начальной оценки; $D_{\delta P}$ – ковариационная матрица ошибок определения матрицы априорных ковариаций P_0; $D_{A_{i+1}}\delta_{(i+1,j+1)}$, $D_{C_{i+1}}\delta_{(i+1,j+1)}$, $D_{Q_{i+1}}\delta_{(i+1,j+1)}$ и $D_{R_{i+1}}\delta_{(i+1,j+1)}$ – соответствующие матрицы интенсивностей; $\otimes$ – символ кронекерова произведения.

Матрица F вида (9), псевдообратная которой F^+ используется в (7) и (8) для оценивания Z и J, является симметричной плохообусловленной знаконеопределенной матрицей. С целью стабилизации искомого решения и придания большей численной устойчивости процедуре псевдообращения в (7), (8), необходимо использовать регулярные методы. При реализации (7) и (8) будем использовать регуляризованный метод Холецкого факторизации симметричных матриц.

На основе симметричной матрицы F порядка n с элементами f_{ij} строится последовательность матриц

$$F^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} F_1^{(k)} & F_2^{(k)} \\ \hline 0 & F_3^{(k)} \end{array}\right], \quad k = 0,1,\ldots, \tag{10}$$

где $F_1^{(k)}$ – верхнетреугольная матрица размера $k \times k$, $F_2^{(k)}$ – прямоугольная матрица, $F_3^{(k)}$ – симметричная матрица порядка $n-k$, 0 – нулевая матрица.

Для этого у клетки $F_3^{(k)}$ определяется ведущий элемент путем сравнения максимальных ее элементов, стоящих на диагонали и вне диагонали:

$$\left|f_{\zeta\zeta}\right| = \max_{k<i\le n}\left|f_{ii}^{(k)}\right|, \quad \left|f_{\tau s}^{(k)}\right| = \max_{k<i\le n,\, i<j\le n}\left|f_{ij}^{(k)}\right|.$$

Если $\left|f_{\zeta\zeta}^{(k)}\right| \ge \left|f_{\tau s}^{(k)}\right|$ и $\left|f_{\zeta\zeta}^{(k)}\right| > \varepsilon$, то у матрицы $F^{(k)}$ меняются местами ζ -е строка и столбец с $(k+1)$ -ми строкой и столбцом соответственно.

После перестановок определяется матрица $F^{(k+1)}$, которая отличается от полученной после перестановок $F^{(k)}$ только элементами клетки

$$F_3^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} f_{k+1,k+1}^{(k)} & d^{(k)} \\ \hline (d^{(k)})^T & W_k \end{array}\right], \tag{11}$$

принимающей вид

$$\left[\begin{array}{c|c} \left|f_{k+1,k+1}^{(k)}\right|^{1/2} & \alpha^{(k)} \\ \hline 0 & F_3^{(k+1)} \end{array}\right], \tag{12}$$

где $\alpha^{(k)} = \left|f_{k+1,k+1}^{(k)}\right|^{-1/2} d^{(k)} \operatorname{sign} f_{k+1,k+1}^{(k)}$, $F_3^{(k+1)} = W_3^{(k)} - (f_{k+1,k+1}^{(k)})^{-1}(d^{(k)})^T d^{(k)}$. Затем делается переход к следующему шагу факторизации.

Если $\left|f_{\zeta\zeta}^{(k)}\right| < \left|f_{\tau s}^{(k)}\right|$ и $\left|f_{\tau s}^{(k)}\right| > \varepsilon$, то вводится ортогональное преобразование

$$B_k = (b_{ii})_{i,j=1}^{n}, \tag{13}$$

элементы которого совпадают с единичной матрицей, за исключением четырех элементов, определяемых следующим образом: $b_{\tau\tau} = -b_{ss} = b_{\tau s} = b_{s\tau} = 2^{-1/2}$. Вычисляется матрица

$$\hat{F}^{(k)} = B_k F^{(k)} B_k,$$

у которой затем τ -й столбец и s-я строка переставляются с $(k+1)$ -м столбцом и $(k+2)$ -й строкой так, чтобы полученный $(k+1)$ -й диагональный элемент был наибольшим. Далее делается пересчет в соответствии с (11), (12) элементов клетки $\hat{F}_3^{(k)}$ и осуществляется переход к следующему шагу факторизации, при этом за $F^{(k+1)}$ принимается полученная $\hat{F}^{(k+1)}$.

Как только $\left|f_{\tau s}^{(k)}\right| \leq \varepsilon$ и $\left|a_{\zeta\tau}^{(k)}\right| \leq \varepsilon$ процесс факторизации прекращается и неортогональная факторизация матрицы F определяется в виде

$$F_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon^T \hat{I} \hat{U}_\varepsilon, \quad \hat{U}_\varepsilon = U_k B_{(k)},$$

где верхнетрапецеидальная матрица $U_k = (F_1^{(k)} \vdots F_2^{(k)})$ составляется из клеток $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ полученной матрицы (10); $B_{(k)} = B_k \ldots B_1$, где $B_i = I$, если преобразование (13) не проводилось; $\hat{I}$ –диагональная матрица с k-м диагональным элементом, определяемым как $\hat{i}_k = \mathrm{sign} f_{kk}^{(k-1)}$.

В случае, если симметричная матрица F порядка n имеет ранг $r \leq n$ и параметр регуляризации взят $\varepsilon = 0$, то в регуляризованном методе Холецкого, будет сделано ровно r шагов факторизации и

$$F_\varepsilon = F, \; F^+ = B_{(r)} U_r^+ \hat{I} (U_r^+)^T B_{(r)}^T. \tag{14}$$

Если дополнительно F – неотрицательно-определенная матрица, то ведущим элементом является диагональный элемент, $\hat{I}$ является единичной матрицей и тем самым

$$F_\varepsilon = U_r^T U_r = F, \quad F_\varepsilon^+ = U_r^+ (U_r^+)^T. \tag{15}$$

Приведенные алгоритмы позволяют стабилизировать процедуру обращения матриц при оценивании состояния стохастических объектов и тем самым повысить точность определения истинной оценки вектора состояния при возмущении параметров объекта и наблюдателя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР:

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. - М.: Наука, 1987. - 712 с.
2. Егупов Н.Д., Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в 5 томах. - М.: Издательство МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2004.
3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. -М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
4. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. - М., 2003. -278с.
5. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. –М.: Радио и связь, 1993. – 464с
6. Ярлыков М.С. Марковская теория оценивания в радиотехнике. –М.: Радиотехника, 2004. - 505 с.
7. Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В. Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // АиТ, №2, 2011. –С.111–130.
8. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Стохастическое управление параметром дискретного марковского процесса // Дальневост. матем. журн., 3:1, 2002. - С.58–60.