

ИНВЕРСИОН АЛМАШТИРИШЛАР

Бердибаев Саламат Азатбаевич

Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти талабаси

РЕЗЮМЕ

Мақолада текисликдаги нуқталарнинг инверсион алмаштиришдаги акслари кўриб ўтилади. Бу ерда инверсион алмаштиришда келиб чиқадиган фигураларнинг хоссалари кўрсатилиб ўтилган.

Инверсия – муҳим геометрик алмаштиришлардан бири бўлиб у бошқа усуллар ёрдамида ечилиши қийин бўлган яшашга доир масалаларни осонроқ масалага келтириб ечишга имкон беради. Шунинг учун инверсион алмаштиришларни кўриб ўтиш аҳамиятлидир.

Биз O марказли ва r радиусли айланани $S(o, r)$ деб белгилаймиз.

Таъриф. $S(o, r)$ айлана ётган текисликнинг айлана маркази O нуқтадан бошқа ҳар бир M нуқтасига (O, M) нурда ётувчи ва

$$OM \cdot OM' = r^2 \quad (1)$$

шартни қаноатлантирувчи M' нуқтани мос келтирадиган алмаштириш инверсион алмаштириш дейилади.

Таърифда кўрсатилган $S(o, r)$ айлана инверсия айланаси, унинг O маркази инверсия маркази ва r радиус эса инверсия радиуси дейилади. Инверсион алмаштиришни қисқача инверсия деб айтамыз.

Инверсия таърифига асосан M ва M' нуқталар битта $[O, M)$ нурда ётгани учун

$$\vec{OM} \uparrow \vec{OM}' \Rightarrow OM \cdot OM' = \left| \vec{OM} \right| \cdot \left| \vec{OM}' \right| = \vec{OM} \cdot \vec{OM}'$$

Шунинг учун (1) шартни

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = r^2 \quad (2)$$

кўринишида ёзиш ҳам мумкин.

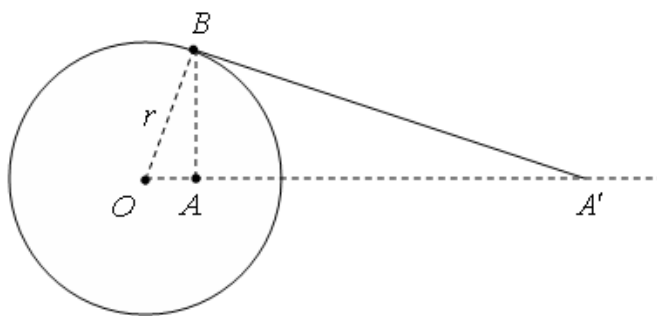
Биз текисликнинг M нуқтасин M' нуқтага мос келтирувчи инверсион алмаштиришни U'_0 деб ёзамиз:

$$U'_0(M) = M'$$

Инверсия айланаси текисликда ётган (инверсия марказидан бошқа) ихтиёрий нуқтага инверсион мос A' нуқтани топиш масалаларини кўриб ўтамыз.

1 – масала. Инверсия билан аниқланган доирага тегишли берилган A нуқтага инверсион мос A' нуқтани топинг.

Ечиш. Бизга $S(o, r)$ инверсия айланаси ва шу айлана билан аниқланган доирада A нукта берилган бўлсин (1 – чизма). Берилган A нукта орқали



1 – чизма.

$[O, A)$ нурга перпендикуляр ℓ тўғри чизик ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг инверсия айланаси билан кесишган нуктасин B деб белгилаймиз. B нукта орқали айланага ўринма ўтказилади. Ўринманинг $[O, A)$ нурга билан кесишган A' нуктаси A нуктага инверсион мос нукта бўлади, яъни $U_0^r(A) = A'$

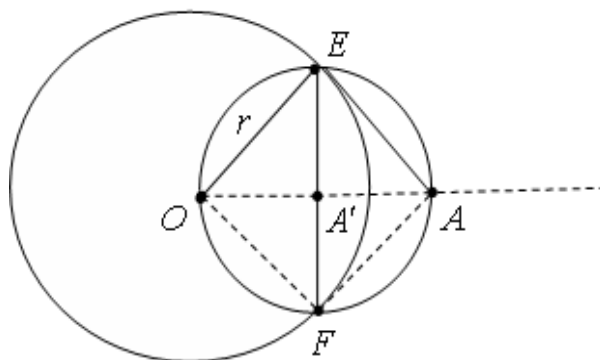
Исбот. A' нукта $[O, A)$ нурга тегишли. Иккинчи томондан OAB ва $OA'B$ учбурчаклар тўғри бурчакли ва битта умумий бурчакка эга бўлгани учун улар ўхшаш бўлади. Бу ўхшашликдан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$$

Демак, A' нукта A нуктага инверсион мос нукта.

2 – масала. Инверсия айланасидан ташқарида берилган A нуктага инверсион мос келувчи A' нуктани топинг.

Ечиш. Берилган A нукта $S(o, r)$ инверсия айланасига нисбатан ташқарида бўлсин (2 – чизма).



2 – чизма.

ОА кесмани диаметр қилиб ёрдамчи айлана чизилади (2 – чизма). Икки айлананинг кесишган нуқталарин туташтирувчи EF ваторнинг [ОА) нур билан кесишган нуқтасин A' деб белгилаймиз. Шу A' нуқта А нуқтанинг инверсион алмаштиришдаги образи бўлади.

Исбот. Ҳақийқатан, изланган A' нуқта [О, А) нурга тегишли. Шу билан бирга $\triangle AEO = \triangle AFO$ бўлганликдан $\angle A'OE = \angle A'OF$. Бундан $A'O$ тўғри чизиқ $\angle EOF$ нинг биссектрисаси эканлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан $\triangle EOF$ тенг ёнли бўлганлиги учун $OA' \perp EF$. Демак, тўғри бурчакли АОЕ учбурчакда $OA \perp A'E$. Шунинг учун $\triangle OA'E \sim \triangle AOE$. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OE}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OA' = OE^2 = r^2$$

муносабат келиб чиқади.

Демак, A' нуқта А нуқтага инверсион мос нуқта бўлади.

3 – масала. Инверсия айланасидаги А нуқтага инверсион мос A' нуқтани топинг.

Ечиш. Агар А нуқта инверсия айланасида ётса, унга инверсион мос нуқта шу нуқтанинг ўзи бўлади. Чунки, (1) шуртга асосан

$$OA \cdot OA' = r^2$$

бўлиши керак. Бу ерда $OA = r$ дан $OA' = r$ келиб чиқади. Инверсиянинг таърифига асосан A' нуқта [ОА) нурга тегишли бўлгани учун $A' = A$ шарт бажарилади.

Инверсион алмаштириш ушбу хоссаларга эга:

I. Текислик нуқталарини инверсион алмаштиришда:

- 1) инверсия айланасининг нуқталари ўз урнини ўзгартмайди;
- 2) инверсия айланаси ташқарисидаги нуқталар инверсия айланаси ичкарасидаги нуқталарга ўтади;

3) инверсия айланаси ичидаги (инверсия марказидан бошқа) нуқталар инверсия айланаси ташқарисидаги нуқталарга ўтади.

II. А нуқта [ОА) нур буйича О марказдан чексиз узоклашган сари, A' нуқта О марказга чексиз яқишлашади ва аксинча.

III. Инверсион алмаштиришда инверсия марказидан чиққан нурнинг айлана ичидаги бўлаги унинг ташқи бўлагига ва аксинча, инверсия марказидан чиққан нурнинг айланадан ташқи бўлаги унинг ички бўлагига ўтади.

IV. Инверсия марказидан ўтувчи тўғри чизиқнинг инверсион алмаштиришдаги образи шу тўғри чизиқнинг ўзи бўлади.

V. Инверсия марказидан ўтмайдиган тўғри чизиққа инверсион мос фигура инверсия марказидан ўтувчи айлана бўлади.

VI. Инверсия марказидан ўтмайдиган айланага мос фигура инверсия марказидан ўтмайдиган айланадир.

Адабиётлар

1. Атажанов Р. К. Геометрик яшаш методлари. Тошкент «Ўқитувчи» 1978
2. Бакельман Инверсия. М. «Наука» 1966г.
3. Кокстер Г. С., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. М. «Наука» 1955г.