АЙЛАНМА СИРТЛАРНИНГ ЭГРИЛИКЛАРИ

Бердибаев Саламат Азатбаевич
Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти талабаси

РЕЗЮМЕ

Мақолада айланма сиртлар бўладиган сфера, псевдосфера ва катеноиднинг тўлиқ ва ўрта эгриликлари ҳисобланган. Бу ерда айланма сиртнинг тўлиқ эгрилигининг ишораси бўйича унинг нуқталарининг эллиптик, гиперболик ёки параболик ҳолатлари кўрсатилган.

Берилган нуқтадаги бош эгриликларининг кўпайтмаси сиртнинг шу нуқтадаги тўлиқ эгрилиги деб ва уларнинг ярим йиғиндиси сиртнинг шу нуқтадаги ўрта эгрилиги деб айтилади. Сиртнинг тўлиқ эгрилиги K билан ва ўрта эгрилиги эса H билан белгиланади. У ҳолда ушбу формулалар келиб чиқади:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\,,\quad H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}\,. \qquad (1)$$

Сиртларнинг эгрилиги бўйича унинг хоссаларин ўрганишга бўлади. Шунинг учун бир нечта айланма сиртларнинг эгриликларин топиш масалаларини кўриб ўтамиз.

1. Сфера. Сферанинг ҳар қандай йўналишдаги нормал кесими ката доирадир. Бу кесимнинг радиуси сфера радиусига тенг. Сферанинг исталган нуқтасидаги индикатрисаси айланадир, чунки унинг ҳар бир нуқтасидан $\sqrt{R}$ га тенг кесмани қўя борсак, маркази шу нуқтадаги айлана ҳосил бўлади. Шунингдек сфера учун

$$E=-RL,\ \ F=-RM,\ G=-RN$$

формула бажарилади. У ҳолда (1) формулага асосан сферанинг тўлиқ ва ўрта эгриликлари қуйидагича бўлади:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{LN-M^2}{R^2(LN-M^2)}=\frac{1}{R^2}\Rightarrow K=\frac{1}{R^2}\,,$$

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}=\frac{-RLN+2RM^2-RLN}{2R^2(LN-M^2)}=-\frac{1}{R}\Rightarrow H=-\frac{1}{R}\,.$$

2. Айланма сирт. Бу сирт учун бош эгрилик радиусларини ва марказларини Менье теоремасидар фойдаланиб топиш мумкин. Айланма сирт, координат чизиқлари парллеллар ва меридианлардан иборат системдги қандай тенглама билан берилса ҳам, яъни профил чизик

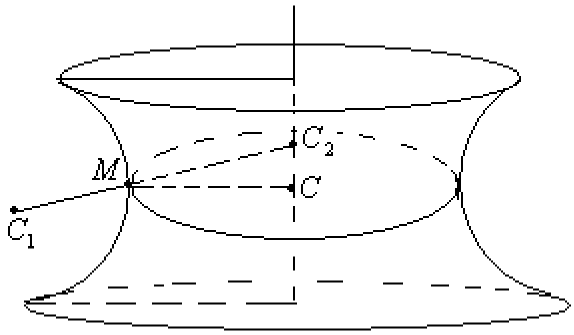
$$\begin{cases} x=\varphi(u) \\ z=\phi(u) \end{cases} \quad \text{ё}\quad z=f(\rho)\ \text{ёки}\ x=\varphi(z)$$

бўлса ҳам сиртнинг иккала квадратик формасидаги ўрта коэффициент нолга тенг бўлади:

$$F = 0, \ M = 0.$$

Демак, параллел ва меридианларининг ҳар бир нуқтадаги йўналишлари бош йўналишлардир. Айланма сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги нормали меридиан текисликда жойлашган. Меридиан йўналишида олинган нормал кесим шу меридианнинг ўзидир, унинг эгрилик маркази, битта бош марказ яна шу меридианнинг C_1 эгрилик марказидир (1 – чизма). Бош радиус меридианнинг игрилик радиусидир:

$$MC_1 = R_1 = \frac{1}{k_1}.$$



1 – чизма.

Иккинчи бош эгрилик радиуси параллелнинг радиусига тенг эмас, чунки параллел ётган текислик сиртнинг нормали орқали ўтмайди. Параллел йўналишдаги нормал кесимнинг эгрилик маркази, Менье теоремасига асосан, шу параллелнинг C марказига проекцияланиши керак. Шунга кўра, иккинчи бош эгрилик маркази C_2 айланиш ўқида ётиши керак, чунки C нуқта параллел текислигида ва айланиш ўқида ётади. Иккинчи бош кесимнинг эгрилик радиуси нормалнинг M нуқтадан айланиш ўқигача бўлган MC_2 кесмага тенг:

$$MC_2 = R_2 = \frac{1}{k_2}.$$

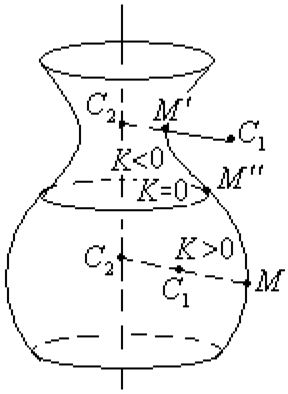
Айланма сиртнинг M нуқтасидаги тўлиқ эгриликнинг мусбат ёки манфийлиги C_1 ва C_2 нуқталарнинг вазиятига боғлиқ:

$$K = \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2 = \frac{1}{MC_1 \cdot MC_2}.$$

Бунда MC_1 ва MC_2 кесмалар бир хил ишорали бўлса, яъни C_1 ва C_2 нуқталар(C_2 нуқта ҳар вақт айланиш ўқида ётди) M нуқтанинг бир томонида ётса, бошқача айтганда профил чизиқ ўзининг ботиқлиги билан айланиш ўқига қаратилган бўлса, у ҳолда бундай нуқтада тўлиқ эгрилик $K>0$ бўлади. Бу вақтда сиртниг M нуқтаси эллиптик нуқта бўлади. Агар C_1 ва C_2 нуқталар M нуқтанинг турли томонида ётса, яъни профиль чизиқ ўзининг қавариқлиги билан айланиш ўқига каратилган бўлса, MC_1 ва MC_2 кесмалар турли ишорали бўлиб, сиртниг М нуқтасидаги Гусс эгрилиги манфий бўлади, яъни K<0. Бу ҳолда текширилаётган нуқта - гиперболик нуқта бўлади. 2-чизма да М` нуқта гиперболик нуқтадир.

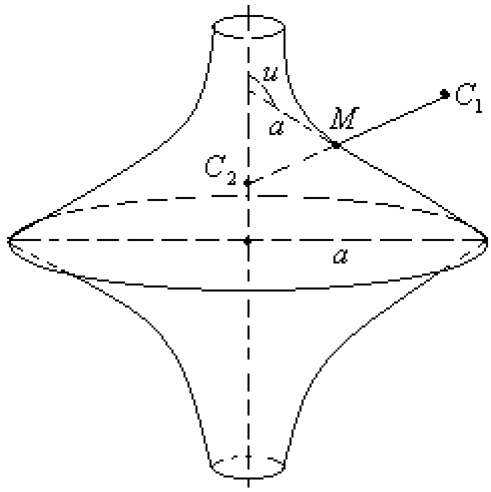
Ниҳоят, профил чизиқнинг ботиқлиги қавариқликка алмашиндиган М`` нуқтасида эгрилик нолга тенг бўлади (2-чизма). Бу ҳолда эгрилик радиуси $M''C_1$ эса шексизликка интилади ($M''C_1 \to \infty$). Тўлиқ эгрилик бундай нуқтада нолга тенг бўлади.

$$K = \frac{1}{M''C_1 \cdot M''C_2} = 0,\ \text{M`` – параболик нуқта.}$$



2 – чизма.

3. Псевдосфера. Трактрисани асоси (асимптотаси) атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сирт псевдосфера дейилади (3-чизма).



3 – чизма.

Трактрисанинг параметрик тенгламалари:

$$\begin{cases} x = a\sin u, \\ z = a(\ln tg\dfrac{u}{2} + \cos u) \end{cases}$$

Бунда u параметр трактрисанинг OZ ўқ (асимптотаси) билан ташкил этган бурчагидир. Бу ҳолда псевдосферанинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = a\sin u\cos v, \\ y = a\sin u\sin v, \\ z = a(\ln tg\dfrac{u}{2} + \cos u). \end{cases}$$

Псевдосфера учун

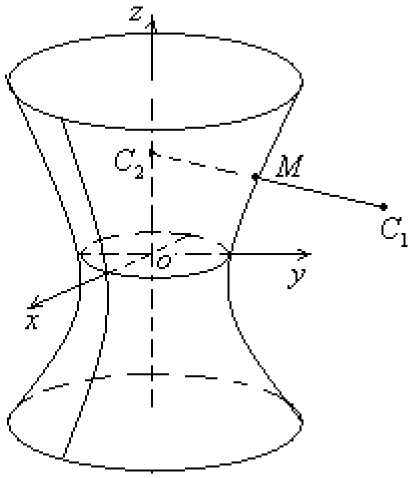
$$MC_1 = |R| = \frac{a^2}{MC_2},$$

бунда MC_2 – нормал узунлиги. Трактриса ўзининг асосига қавариқлиги билан қаратилган. Шунинг учун MC_1 ва MC_2 кесимлар тескари ишорали, демак сиртнинг ҳамма нуқталари гиперболик бўлиб,

$$K = \frac{1}{MC_1 \cdot MC_2} = -\frac{1}{a^2} = const.$$

Псевдосферанинг тўлиқ эгрилиги ҳамма жойида бир хил, лекин манфий. Юқорида кўриб ўтган сферанинг тўлиқ эгрилиги ўзгармас, бироқ мусбатдир. Шунинг учун, биринчи сиртга псевдосфера (ёлған сфера) номи берилган.

4. Катеноид. Занжир чизиқни ўз асоси атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сирт катеноид дейилади (4 – чизма).



4 – чизма.

Занжир чизиқ ушбу тенглама билан берилган бўлсин:

$$\rho = x = \frac{a}{2}\cdot(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}) = a\cdot ch\frac{z}{a} \qquad (2)$$

Катеноид учун

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

ва (2) формуладан

$$\frac{2\rho}{a} = \frac{e^{2\cdot\frac{z}{a}} + 1}{e^{\frac{z}{a}}}$$

ёки $e^{\frac{z}{a}} = t$ деб фараз қилсак,

$$t^2 - \frac{2\rho}{a}t + 1 = 0 \Rightarrow at^2 - 2\rho t + a = 0..$$

Бундан,

$$t = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

Бу ердан

$$\frac{z}{a} = \ln t \Rightarrow z = a \cdot \ln\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

Демак, катеноиднинг параметрик тенгламлари ушбу кўринишга келади:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = a \cdot \ln\dfrac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} \end{cases}$$

Занжир чизиқ учун,

$$\rho^2 = a^2 + u^2.$$

Бунда u – меридианнинг бирор параллелдан ҳисобланган узунлигидир.
Демак, катеноиднинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 + u^2}\ \cos\varphi \\ y = \sqrt{a^2 + u^2}\ \sin\varphi \\ z = a \cdot \ln\dfrac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{a} \end{cases}$$

Занжир чизиқ учун эгрилик радиуси нормал узинлигига, яъни MC_1 кесма MC_2 кесмага тенг. Бирок, бу занжир(профиль) чизиқ айланиш ўқига ўзининг қавариқлиги билан қараганлиги учун MC_1 ва MC_2 кесмаларнинг узунликлари тенг бўлиб, уларнинг йўналишлари тескаридир, яъни

$$\overline{MC_2} = -\overline{MC_1}.$$

Шу сабабли,

$$K = \frac{1}{\overline{MC_1} \cdot \overline{MC_2}} = -\frac{1}{\overline{MC^2}_1} < 0.$$

Шу билан бирга

$$2H = \overline{MC_1} + \overline{MC_2} = 0.$$

Шундай қилиб, катеноиднинг ҳамма нуқталари гиперболик нуқталардан иборат бўлади. Бу ерда унинг ихтитёрий нуқтасидаги ўрта эгрилиги нолга тенг бўлгани учун катеноид минимал сиртдир.

Эслатма. Ўрта эгрилиги нолга тенг сирт минимал сирт дейилади.

Адабиётлар

1. Александров А.Д. Нецветаев Н.Ю. Геометрия, Москва “Наука” 1990, 671с.

2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия, ч.2, М. «Просвещение» 1987 g.

3. Мищенко А. С, Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.—М.: Издательство физико-математической литературы, 2004.