СИРТНИНГ УРИНМА ТЕКИСЛИГИДАН ЧЕТЛАНИШИ

Бердибаев Саламат Азатбаевич
Ажиниёз номидаги Нукус давлат педагогика институти талабаси

РЕЗЮМЕ

Мақолада сирнинг ўринма текисликтан четланишин кўрсатувчи иккинчи квадратик формаси текислик, сфера ва айланма сиртлар учун ҳисоблаб кўрсатилган. Бу ерда текисликнинг иккинчи квадратик формаси нолга тенг эканлиги, сферанинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларининг мос коэффициентлари пропорционал бўлиши кўрсатилган.

Сиртнинг фазодаги эгрилигини характерлаш учун du ва dv га нисбатан иккинчи квадратик формани киритишга тўғри келади. Сиртнинг M нуқтасидан M` нуқтасига йўналган векторни $\Delta\vec{r}$, шу нуқтадаги бирлик нормал векторни $\vec{n}$ ва сиртдаги M нуқтада ўтказилган ўринма текисликнинг шу сиртдан шетланиши h десак, бу четланиш $\vec{n}\Delta\vec{r}$ скаляр кўпайтмага тенг бўлади. Шунинг учун,

$$h = \vec{n}\Delta\vec{r} = \vec{n}d\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{n}d^2\vec{r} + \varepsilon(du^2 + dv^2).$$

Бу формулада $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$ билан бирга ε ҳәм нолга га интилади ёки, бошқача айтганда, у du ва dv га нисбатан юқори тартибли чексиз кичикни ифодалайди. Бу ерда

$$\vec{n}d\vec{r} = 0$$

чунки $d\vec{r}$ уринма вектор $\vec{n}$ нормалга перпендикуляр бўлади, демак:

$$h = \frac{1}{2}\vec{n}d^2\vec{r} + \varepsilon(du^2 + dv^2). \qquad (1)$$

Четланишнинг бош қисми

$$\frac{1}{2}\vec{n}d^2\vec{r}.$$

Аммо

$$\vec{n}d^2\vec{r} = \vec{n}(\vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v).$$

Энди

$$\vec{n}\vec{r}_u = \vec{n}\vec{r}_v = 0$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\vec{n}d^2\vec{r} = (\vec{n}\vec{r}_{uu})du^2 + 2(\vec{n}\vec{r}_{uv})dudv + (\vec{n}\vec{r}_{vv})dv^2$$

бўлади. Бу тенгламнинг унг томони du ва dv га нисбатан квадратик формадир, унинг коэффициентлари қуйидагича белгиланади:

$$L = \vec{n}\vec{r}_{uu}, \quad M = \vec{n}\vec{r}_{uv}, \quad N = \vec{n}\vec{r}_{vv}$$

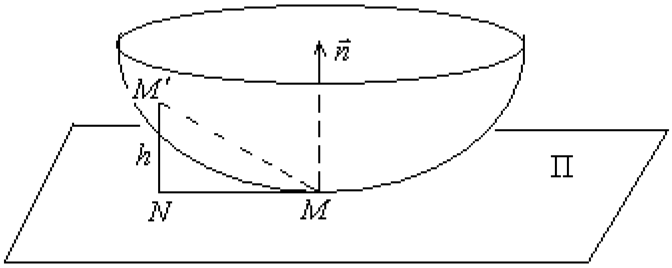
Ҳосил бўлган

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

форма сиртнинг иккинчи квадратик формаси дейилади ва у φ_2 орқали белгиланади. У ҳолда

$$\varphi_2 = \vec{n}d^2\vec{r} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 .$$

Агар биринчи квадратик форма сиртнинг ички геометриясини аниқловчи ёй элементини берган бўлса, иккинчи квадратик форма сиртнинг ташқи кўринишини акс эттиради(1-чизма).



1-чизма.

Бу ерда

$$\frac{\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}\vec{n}d^2\vec{r} .$$

ифода h четланишнинг бош қисмига тенг бўлгани учун сиртни эгиб шаклин ўзгартганда, h четланиш ва у билан бирга иккинчи квадратик форма ҳам ўзгаради.

Сиртнинг биринчи квадратик формаси M нуқтага яқин ҳамма M` нуқталар учун ҳар вақт мусбат эди, лекин иккинчи квадратик форма эса M даги П уринма текисликдан бир томонд ётувчи нуқталар учун мусбат бўлиб, П уринма текисликнинг икинчи томонида ётувчи нуқталар учун манфийдир(чунки иккинчи квадратик форма h четланишдаги бош қисмининг ярмиг тенг).

Текислик учун четланиш айнан нольга тенг(h=0), икинчи квадратик форма ваш у билан бирга унинг коэффициентлари ҳм айнан нолга тенг:

$$L = M = N = 0$$

Иккинчи квадратик форма ва унинг коэффициентлари учун бошқа ифодаларни берайик. Бунинг учун $\vec{n}d\vec{r} = 0$ ифодани дифференциаллаймиз:

$$d\vec{n}d\vec{r} + \vec{n}d^2\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{n}d^2\vec{r} = -d\vec{n}d\vec{r} .$$

Шу сабабли

$$\varphi_2 = \vec{n}d^2\vec{r} = -d\vec{n}d\vec{r} ,$$

$$L = \vec{n}\vec{r}_{uu} = -\vec{r}_u\vec{n}_u , \ M = \vec{n}\vec{r}_{uv} = -\vec{r}_u\vec{n}_v = -\vec{r}_v\vec{n}_u , \ N = \vec{n}\vec{r}_{vv} = -\vec{r}_v\vec{n}_v . \qquad (2)$$

Бу ердаги бирлик $\vec{n}$ вектор учун

$$\vec{n}=\frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_u]}{\sqrt{EG-F^2}}$$

бажарилди. Шунинг учун иккинчи квадратик форманинг коэффициентларин топиш формуласи қуйидаги турга келади:

$$L=\vec{n}\vec{r}_{uu}=\frac{(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{r}_{uu})}{\sqrt{EG-F^2}},\ M=\vec{n}\vec{r}_{uv}=\frac{(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{r}_{uv})}{\sqrt{EG-F^2}},\ N=\vec{n}\vec{r}_{vv}=\frac{(\vec{r}_u,\vec{r}_v,\vec{r}_{vv})}{\sqrt{EG-F^2}}$$

Бу ерда уринма текисликнинг h четланиши қуйидагича бўлади:

$$2h\approx Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 .$$

Биринчи квадратик форм ва унга доир муносабатлар эгри чизиқли координаталарининг биринчи тартибли ҳосилаларига боғлиқ эди. Иккинчи квадратик форма ва унинг коэффициентлари орқали ифодаланувчи муносабатлар иккинчи тартибли ҳосилаларга боғлиқдир, чунки иккинчи квадратик форманинг коэффициентлари $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$ векторлар орқали ифодаланади.

Сиртниң уринма текисликдан четланишини характерлайдиган иккинчи квадратик формага мисоллар кўриб ўтамиз:

1-мисол. Сирт $z=f(x,y)$ тенглама билан берилган. Шу сиртнинг иккинчи квадратик формасин топиш керак. Бу ерда сиртнинг параметрик тенгламасини

$$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=f(u,v) \end{cases}$$

кўринишда ёзадиган бўлсак, унинг вектор формадаги тенгламаси

$$\vec{r}(u,v)=u\cdot\vec{i}+v\cdot\vec{j}+f(u,v)\cdot\vec{k}$$

турда ёзилади. Бу ҳолда

$$\vec{r}_u=\vec{i}+f_u\cdot\vec{k},\ \vec{r}_v=\vec{j}+f_v\cdot\vec{k},\ \vec{r}_{uu}=f_{uu}\cdot\vec{k},\ \vec{r}_{uv}=f_{uv}\cdot\vec{k},\ \vec{r}_{vv}=f_{vv}\cdot\vec{k}$$

Демак,

$$E=\vec{r}_u^{\,2}=1+f_u^2,\ F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=f_u f_v,\ G=\vec{r}_v^{\,2}=1+f_v^2,$$

$$EG-F^2=(1+f_u^2)(1+f_v^2)-(f_u f_v)^2=1+f_u^2+f_v^2,$$

$$L=\frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\begin{vmatrix}1 & 0 & f_u\\ 0 & 1 & f_v\\ 0 & & f_{uu}\end{vmatrix}=\frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\begin{vmatrix}1 & 0 & f_u\\ 0 & 1 & f_v\\ 0 & & f_{uv}\end{vmatrix}=\frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & & f_{vv} \end{vmatrix} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}.$$

2-мисол. Текисликнинг тенгламаси берилган:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Бу ерда $C \neq 0$ деб фараз этсак,

$$z = f(x,y) = ax+by+d$$

бўлади. Бунда

$$\vec{r}_{xx} = f_{xx}\cdot\vec{k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\vec{k} = 0\,,\ \vec{r}_{xy} = f_{xy}\cdot\vec{k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\vec{k} = 0,\ \vec{r}_{yy} = f_{yy}\cdot\vec{k} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\vec{k} = 0$$

Демак, иккинчи квадратик форма айнан нолга тенг. Аксинча, бу учта ҳосила нолга тенг бўлса, берилган сирт текисликдир, ҳақиқатан:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

бўлганда, буларни интеграллаб

$$z = ax+by+d$$

кўринишдаги тенгламага келамиз. Демак, фақат текисликнинг иккинчи квадратик формаси нолга тенг.

3-мисол. Сфера. Координата боши сфера марказида ётган бўлиб, бирлик нормал $\vec{n}$ бўлса, сферанинг тенгламаси $\vec{r} = R\vec{n}$ бўлади. Бу ерда R сфера радиуси. Бундан,

$$\vec{r}_u = R\vec{n}_u\,,\ \vec{r}_v = R\vec{n}_v$$

ва

$$\vec{r}_u^{\,2} = \vec{r}_u\vec{r}_u = R\vec{r}_u\vec{n}_u\,,\ \vec{r}_u\vec{r}_v = R\vec{r}_u\vec{n}_v\,,\ \vec{r}_v^{\,2} = \vec{r}_v\vec{r}_v = R\vec{r}_v\vec{n}_v$$

ёки (2) формулага асосан,

$$E = -RL,\ F = -RM,\ G = -RN\,,$$

булардан:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = -\frac{1}{R} \tag{3}$$

Шундай қилиб, сфера учун биринчи ва иккинчи квадратик формаларининг мос коэффициентлари пропорционалдир. Аксинча, шу хоссага эга бўлган ҳар қандай сирт сферадир. Агар (3) муносабат сиртнинг айрим нуқталарида юз берса, улар думалоқланиш нуқталари дейилади.

4-мисол. Айланма сирт. Айланма сиртнинг вектор формадаги тенгламси:

$$\vec{r} = \vec{i}\,\varphi(u)\cos v + \vec{j}\,\varphi(u)\sin v + \vec{k}\,\psi(u)$$

ёки

$$\begin{cases} x = \varphi(u)\cos v \\ y = \varphi(u)\sin v \\ z = \psi(u) \end{cases}$$

Бу ерда айланма сиртнинг профиль чизиғи

$$\begin{cases} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$$

тенглама билан берилган. Биз қорида берилган тенгламалардан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\vec{r}_u = \vec{i}\,\varphi'(u)\cos v + \vec{j}\,\varphi'(u)\sin v + \psi'(u)\vec{k},$$

$$\vec{r}_v = -\vec{i}\,\varphi(u)\sin v + \vec{j}\,\varphi(u)\cos v\ ,$$

$$\vec{r}_{uu} = \vec{i}\,\varphi''(u)\cos v + \vec{j}\,\varphi''(u)\sin v + \psi''(u)\vec{k},$$

$$\vec{r}_{uv} = -\vec{i}\,\varphi'(u)\sin v + \vec{j}\,\varphi'(u)\cos v,\ \ \vec{r}_{vv} = -\vec{i}\,\varphi(u)\cos v - \vec{j}\,\varphi(u)\sin v$$

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = [\vec{i}, \vec{j}]\varphi'(u)\cos v\,\varphi(u)\cos v - [\vec{j}, \vec{i}]\varphi'(u)\sin v\,\varphi(u)\sin v - [\vec{k}, \vec{i}]\psi'(u)\varphi(u)\sin v +$$
$$+ [\vec{k}, \vec{j}]\psi'(u)\varphi(u)\cos v = \vec{k}\varphi'(u)\varphi(u) - \vec{j}\,\psi'(u)\varphi(u)\sin v - \vec{i}\,\psi'(u)\varphi(u)\cos v,$$

Булардан,

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = \varphi'^2 + \psi'^2\ ,\quad F = \vec{r}_u\vec{r}_v = 0,\ G = \vec{r}_v^{\,2} = \varphi^2,$$

$$EG - F^2 = (\varphi'^2 + \psi'^2)\varphi^2,$$

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\psi'(u)(-\vec{i}\cos v - \vec{j}\sin v) + \vec{k}\varphi'(u)}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\ ,$$

$$L = \vec{n}\vec{r}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(-\psi'\varphi''\cos^2 v - \psi'\varphi''\sin^2 v + \varphi'\psi'') = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''),$$

$$M = \vec{n}\vec{r}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(\varphi'\psi'\sin v\cos v - \varphi'\psi'\cos v\sin v) = 0,$$

$$N = \vec{n}\vec{r}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}(\varphi\psi'\cos^2 v + \varphi\psi'\sin^2 v) = \frac{\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\ .$$

Айланма сиртнинг иккинчи квадратик формаси

$$\varphi_2 = \frac{(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')du^2 + \varphi\psi' dv^2}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, айланма сирт учун биринчи ва иккинчи квадратик формаларнинг ўрта коэффициентлари нолга тенг экан:

$$F = 0,\ \ M = 0\ .$$

Демак, айланма сиртнинг ихтиёрий нуқтасидаги уринма текисликнинг h четланиши қуйидагича бўлади экан:

$$h \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')du^2 + \varphi\psi'dv^2}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Адабиётлар

1. Додажонов Н.Д., Юнусметов Р, Абдуллаев Т. . Геометрия. 2-қисм, Тошкент.«Ўқитувчи», 1988 й.

2. Normanov A. Ya . Differentsial geometriya. Toshkent. «Universitet». 2003 y.

3..Феденко А.С и другие. Сборник задач по дифференциальной геометрии, М.Наука, 1979,272с