BOSHLANG'ICH FUNKSIYA VA UNING TATBIQLARI

Gulnozaxon Uzoqova Nazirjon qizi
Farg'ona viloyati O'zbekiston tuman 2-son kasb-hunar maktabi
Matematika fani o'qituvchisi

Differensial hisobning asosiy vazifasi berilgan $F(x)$ funksiyaga ko'ra uning hosilasi $F'(x)=f(x)$ ni yoki differensiali $F'(x)dx=f(x)dx$ ni topishdir.

Endi teskari masala, ya'ni $F(x)$ funksiyani uning ma'lum $f'(x)$ hosilasiga yoki $f'(x)dx$ differensialiga ko'ra topish amali bilan shug'ullanamiz.

1-ta'rif. Biror oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun shu oraliqning barcha nuqtalarida $F'(x)=f(x)$ yoki $dF(x)=f(x)dx$ shart bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya shu oraliqda $f(x)$ ning **boshlang'ich funksiyasi** deyiladi.

Masalan, $F(x)=sinx$ funksiya butun son o'qida $f(x)=cosx$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki istalgan x uchun $F'(x)=(sinx)'=cosx=f(x)$. Shuningdek $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ funksiya (-1,1) intervalda $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki intervaldan olingan barcha x lar uchun $F'(x)=(\sqrt{1-x^2})'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=f(x).$

1-eslatma. $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ (agar u mavjud bo'lsa) uzluksiz funksiya bo'ladi.

Haqiqatan. Boshlang'ich funksiyaning ta'rifiga binoan $F'(x)$ hosila mavjud va $F'(x)=f(x)$. Differensiallanuvchi funksiyaning uzluksizligidan $F(x)$ ning uzluksizligi kelib chiqadi.

Endi $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lganda uning qolgan barcha boshlang'ich funksiyalari $F(x)+C$ ko'rinishga ega bo'lishni ko'rsatamiz.

Bundan keyin C orqali ixtiyoriy o'zgarmas belgilanadi.

1-lemma. Biror oraliqda hosilasi nolga teng funksiya shu oraliqda o'zgarmasdir.

Isboti. Shartga ko'ra oraliqdagi barcha x uchun $f'(x)=0$. Oraliqqa tegishli $x_1<x_2$ qiymatlarni olib

$f(x_2)-f(x_1)=f'(z)(x_2-x_1)$, $x_1<z<x_2$

Lagranj formulasini yozamiz. $f'(z)=0$ bo'lganligi uchun

$f(x_2)-f(x_1)=0$ yoki $f(x_2)=f(x_1)$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu $f(x)$ funksiyaning qaralayotgan oraliqning istalgan nuqtalaridagi qiymatlari bir xil ekanligini ya'ni u o'zgarmasligini ko'rsatadi.

***1*-teorema**. Agar $F(x)$ va $\phi(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning biror oraliqdagi boshang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda ular bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi: $\phi(x)-F(x)=C$.

Isboti. $\phi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning eslatilgan oraliqdagi $F(x)$ dan farqli boshqa bir boshlangich funksiyasi bo'lsin, ya'ni $\phi'(x)=f'(x)$.

U holda shu oraliqdagi ixtiyoriy x uchun

$[\phi(x)-F(x)]'=\phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ bo'ladi.

32.1- lemmaga muvofiq

$\phi(x)-F(x)=C$ yoki $\phi(x)=F(x)+C$ bo'ladi.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror orliqdagi boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, u holda uning shu oraliqdagi istalgan boshlang'ich funksiyasi $\phi(x)=$ $=F(x)+C$ ko'rinishga ega bo'ladi.

2-eslatma. Har qanday funksiya ham boshlang'ich funksiyaga ega bo'lavermaydi.

1-misol. $x=0$ nuqtada uzilishga ega

$$f(x)=\begin{cases} -1, & agar \quad -1<x<0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad 0<x<1 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz.

Bu funksiya *(-1,1)* intervalda boshlang'ich funksiyaga ega emasligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz. *(-1,1)* intervalda *f(x)* funksiya uchun boshlang'ich funksiya *F(x)* mavjud bo'lsin. U holda ta'rifga binoan *(-1,1)* intervalga tegishli barcha *x* lar uchun *F′(x)* hosila mavjud bo'lib *F′(x)= f(x)* tengliko'rinli bo'ladi. Jumladan *F′(0)= f(0)* tenglik ham to'g'ri bo'ladi.*(0,1)* intervalga tegishli *x* qiymatni olib*[0,x]* kesmani qaraymiz. *F(x)* funksiya *[0,x]* kesmada uzluksiz, (0,*x*) intervalda differensiallanuvchi bo'lganligi sababli Lagranj formulaga binoan shunday *z (0<z<x)*qiymat mavjud bo'lib

$$F(x)- F(0)= F'(z)(x-0)= f(z)\cdot x=1\cdot x=x$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bundan $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$ tenglikka yoki hosilaning ta'rifiga asosan

$F'(0)=F'(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik *F′(0)=*

=f(0)=0 га zid. Bu ziddiyatga berilgan *f (x)* funksiya uchun *F (x)* boshlang'ich funksiya mavjud deb qilgan noto'g'ri farazimiz oqibatida keldik.

2-misol. *x=0* nuqtada uzilishga ega bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}+1, & agar\ -1<x\le 0 \quad bo'lsa,\\ 2x, & agar\ \ 0<x<1 \quad bo'lsa\end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun

$$f(x)=\begin{cases}x, & agar\ -1<x\le 0 \quad bo'lsa,\\ x^2, & agar\ \ 0<x<1 \quad bo'lsa\end{cases}$$

funksiya *(–1,1)* oraliqda boshlang'ich funksiya bo'lishi ko'rinib turibdi.

Bu misollardan ko'rinib turibdiki uzilishga ega funksiyalar orasida boshlang'ich funksiyaga ega bo'lganlari ham ega bo'lmaganlari ham mavjud ekan.

2-teorema. Biror oraliqda uzluksiz funksiya shu oraliqda borshlang'ich funksiyaga ega.

Bu teoremaning isboti keyinroq keltiriladi.

Adabiyotlar ro`yxati

1. В.П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. Москва, «Наука", 2010.

2. Э.Холмуродов,З.Узоқов-Экстремумлар назариясининг амалий масалалар ечишга тадбиқи,Қарши,2011й.