SHARTLI KORREKT MASALA TAQRIBIY YECHIMINI KVAZIYECHIM ORQALI ANIQLASH

Haydarov Akram
Samarqand davlat universiteti dotsenti. SamDU. O`zbekiston
Ochilov Shahzod Otabek o`g`li
Samarqand davlat universiteti magistranti. SamDU, O`zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada shartli korrekt masala taqribiy yechimini kvaziyechim orqali aniqlashning usullari ayrim misollar yordamida ko`rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: Kvaziyechim, shartli korrekt masala, qavariq to`plam, shartli ekstremum, qavariq programmalashtirish, ketma- ket yaqinlashish, uzluksizlik moduli.

KIRISH

Matematik fizika masalalrini yechishdagi asosiy usullardan biri integral tenglamalar usulidir. Matematik fizikaning nokorrekt quyilgan masalalari Fredgolmning birinchi tur integral tenglamasiga keltiriladi. Matematik fizikaning korrekt qo`yilgan masalalari esa Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasiga keltirilishi matematik fizika tenglamalari bo'yichaadabiyotlarda keltirilgan.

Matematik fizika masalasi shartli korrekt qo`yilgan yoki A.N. Tixonov ma‟nosida korrekt qo`yilgan deb aytiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. Tajribadan ma‟lumki, qo`yilgan masalaning yechimi mavjud va u yechim biror funksional fazoning to`plam ostisi M ga tegishli,
2. Masalaning yechimi M to`plamda yagona,
3. M ga karashli yechim masalaning berilganlariga uzluksiz ravishda bog`liq, ya‟ni masala berilganlarining yechimni M dan tashqariga chiqarmaydigan cheksiz kichik variatsiyasiga yechimni M dagi cheksiz kichik variasiyasi mos kelsa.

M to`plamga masalaning korrektlik to`plami deb aytiladi. Ko`pchilik hollarda $M$ to`plam kompakt bo`ladi.

Korrektlikning klassik ta‟rifi va A.N. Tixonov ma‟nosidagi ta‟rifi orasidagi farqni qarash muhimdir. Korrektlikning klassik ta‟rifida yechimning mavjudligi isbotlanadi. Keyingi ta‟rifda yechimning mavjudligi tajribadan kelib chiqadi. Yechimning yagonaligi esa xar ikkala holda bir xildir, ya‟ni yagonalik teoremasini isbotlash orqali beriladi. Yechimning turg`unligi esa xar ikkala ta‟rifda ham isbotlanadi. Keyingi ta‟rifda esa turg`unlik korrektlik to`plami M da isbotlanadi.

ASOSIY QISM

Biz $Ax = f$ *(1)* operator tenglamani qaraymiz. Bu operator tenglamani yechish shartli korrektqo`yilgan bo`lsin. Yani uning yechimi yagona, yechimning mavjudligi tajribadan ma`lum va u yechim $M$ to`plamga tegishli, hamda yechim berilganlarning

M_A dagi qiymatlariga tekis uzluksiz ravishda bog`liq. Bunda $M_A$ to`plam M to`plamning A operator orqali aksi.

(1) tenglamaning kvaziyechimi deb shunday $\bar{x} \in M$ elementga aytiladiki,

$$\|A\bar{x} - f\| = \inf_{x \in M} \|Ax - f\| \quad (2)$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

Agar (1) tenglamaning o`ng tomoni uchun uning yechimi mavjud bo`lsa, kvaziyechim (2) tenglikga asosan (1) ning aniq yechimi bilan ustma-ust tushadi. Kvaziyechim tushunchasi ma`noga ega bo`ladi, agar tenglamaning o`ng tomoni uchun yechim korrektlik sinfi bo`lgan M to`plamdan tashqarida joylashadigan bo`lsa. Agar korrektlik sinfi kompakt to`plam bo`lsa, u holda kvaziyechim hammavaqt mavjud, chunki uzluksiz funksiya kompakt to`plamda o`zining eng kichik qiymatiga erishadi.

Kvaziyechim tushunchasini (1) operator tenglamalarni yechishda qo`llanilishini qaraymiz. (1) tenglamaning o`ng tomoni taqriban berilgan bo`lsin.

Ya`ni $f$ funksiya o`rniga f_e berilgan bo`lib,

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon \quad (3)$$

bo`lsin. Bu hol uchun, yani

$$Ax = f_\varepsilon$$

tenglamaning kvaziyechimini $\bar{x}_\varepsilon$ deb belgilab, tenglamaning aniq yechimi va kvaziyechimi deb belgilab, tenglamaning aniq yechimi va kvaziyechimi $\bar{x}_\varepsilon$ orasidagi yaqinlikni baholaymiz. Kvaziyechimning (2) ko`rinishda aniqlanganligidan (3) ga asosan

$$\| A\bar{x}_\varepsilon - f_\varepsilon\| < \| Ax - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

kelib chiqadi. Shuning uchun,

$$\| A(\bar{x}_\varepsilon - x)\| \leq \| A\bar{x}_\varepsilon - f_\varepsilon\| + \| Ax - f_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Agar A^{-1} operatorning M_A dagi uzluksizlik modulini w(t) desak, x va $\bar{x}_\varepsilon$ o`rtasidagi yaqinlik quyidagicha baholanadi

$$\| x - \bar{x}_\varepsilon\| \leq \omega(2\varepsilon) \quad (4)$$

Korrektlik to`plami $M$ qavariq bo`lsa (4) baholashni yanada aniqroq yozish mumkin. Bu holda

$$\| x - \bar{x}_\varepsilon \| \leq \omega(\varepsilon)$$

tengsizlikga ega bo`lamiz.

Kvaziyechimni aniqlash M to`plamni tuzilishiga qarab juda murakkab masala bo`lishi mumkin. Agar M to`plam qavariq bo`lsa, kvaziyechimni aniqlash masalasi qavariq programmalashtirish masalasiga tengkuchli bo`ladi.

Quyidagi sodda holda kvaziyechimni topish masalasini qaraymiz. Operator tenglamaning korrektlik sinfi M quyidagicha aniqlansin:

$$x \in M: \quad \{x = By, \quad \|y\| \le C\},$$

bunda yÎY. Y - Gilbert fazosi va B - chiziqli uzluksiz operator bo`lsin. Demak, $M$ to`plam sharning V operator orqali aksidan iborat ekan. Bu holda kvaziyechimni topish masalasi $(Ax - f_e, Ax - f_e)$ funksionalning $(B^{-1}x, B^{-1}x)$ £ C^2 shartdagi minimumini topishga tengkuchli bo`ladi. Agar $x = By$ ekanligini hisobga olsak kvaziyechimni topish masalasi

$$(Gy - f_e, Gy - f_e)\ (G = AB)\ (5)$$

Funksionalning

$$(y, y) \text{ £ } C^2 \quad (6)$$

shartdagi minimumini topishga tengkuchli bo`ladi. (5), (6) shartli minimum masalasi yechimini $\bar{y}_\varepsilon$ deb belgilaymiz va uni topish uchun Lagranj usulidan foydalanamiz. Shuning uchun,

$$(Gy - f_e, Gy - f_e) + \text{l}(y, y) = F(y)$$

funksionalning statsionar nuqtalarini topamiz. Lagranj usuliga asosan $F(y+u) - F(y)$ orttirmaning chiziqli qismini nolga tenglashtiramiz

$$(G^*Gy - G^* f_e + \text{l}y, u) = 0.$$

Oxirgi tenglik bajarilishi uchun $\bar{y}_\varepsilon$

$$\left(G^*G + \lambda E\right)y = G^* f_\varepsilon = \tilde{f}_\varepsilon \ (7)$$

tenglamaning biror λ qiymat uchun yechimi bo`lishi kerak. Bunday λ qiymatning musbat ekanligini ko`rsatamiz. $\{\text{j}_k\}$ funksiyalar sistemasi G^*G -o`zaro qo`shma va musbat operatorning xos funksiyalari, $\{\text{l}_k\}$ esa xos qiymatlari sistemasi bo`lsin.

U holda $\tilde{f}_\varepsilon$ va $\bar{y}_\varepsilon$ larni $\{\varphi_k\}$ sistemaga nisbatan quyidagi Fure qatorlariga yoyish mumkin

$$\tilde{f}_\varepsilon = \sum_1^\infty \tilde{f}_k^\varepsilon \varphi_k, \quad \bar{y}_\varepsilon = \sum_1^\infty \bar{y}_k^\varepsilon \varphi_k$$

Bu qatorlarni (7) ga qo`yib,

$$\bar{y}_\varepsilon = \frac{1}{\lambda_k + \lambda}\bar{f}_k^\varepsilon$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan foydalanib $\lambda < 0$ bo`lganda $\bar{y}_\varepsilon$ qiymatda yuqorida keltirilgan funksionalning minimumga erishmasligini ko`rsatamiz. Xaqiqatdan ham,

$$\left(G\bar{y}_\varepsilon - f_\varepsilon, G\bar{y}_\varepsilon - f_\varepsilon\right) = \left(G\bar{y}_\varepsilon, G\bar{y}_\varepsilon\right) + (\bar{f}_\varepsilon, \bar{f}_\varepsilon) - 2\left(G\bar{y}_\varepsilon, f_\varepsilon\right) = (\bar{f}_\varepsilon, \bar{f}_\varepsilon) +$$

$$+\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k + \lambda}\tilde{f}_k^{\varepsilon^2} - 2\sum_1^\infty \frac{\lambda_k}{(\lambda_k + \lambda)^2}\tilde{f}_k^{\varepsilon^2} = \quad (8)$$

$$= (f, f) - \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k + \lambda}\left(2\lambda_k - \frac{1}{\lambda_k + \lambda}\right)\tilde{f}_k^{\varepsilon^2}$$

bo`lganligi uchun (8) da $\lambda < 0$ bo`lsa funksional minimumga erishmasliginiko`rish oson. Shunday qilib, $\lambda$ musbat bo`lganligi uchun $(G * G + lE)$ operatorning teskarisi - $(G * G + lE)^{-1}$ operator mavjud. Shuning uchun, $\bar{y}_\varepsilon$ kvaziyechim

$$\bar{y}_\varepsilon = \left(G * G + \lambda E\right)^{-1} G * f_\varepsilon \quad (9)$$

formula orqali topiladi. (9) tenglikka asosan $\bar{x}_\varepsilon$ kvaziyechim esa

$$\bar{x}_\varepsilon = B(G * G + \lambda E)^{-1} G * f_\varepsilon \quad (10)$$

ko`rinishga ega. Agar $f_\varepsilon \in M_A$ bo`lsa, $\bar{x}_\varepsilon = A^{-1} f_\varepsilon$ bo`ladi, bundan $\lambda = 0$ kelib chiqadi.

ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последствием. Дис. док. физ-мат. Наука. 2019. 245 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск.: Сибирское научное издетелство, 2019. – 457 с.
3. Прилепко А.И. Об обратных задачах теории потенциала. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т.3. С. 30-44.
4. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптическых уравнений. //Докл. АН СССР, 2014. Т. 277. №6. С. 1335 – 1337.
5. Хайдаров А., Шодиев Д.С. О единственности решения обратных задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Узб. мат. журнал. 2012. 76-78 стр.