BIRINCHI TUR OPERATOR TENGLAMALARNI REGULYARIZATSIYALASH

Haydarov Akram

Samarqand davlat universiteti dotsenti. SamDU. O`zbekiston

Ochilov Shahzod Otabek o`g`li

Samarqand davlat universiteti magistranti. SamDU, O`zbekiston

Annotatsiya: Mazkur maqola birinchi tur operator tenglamalarni regulyarizatsiyalash usullarini o`rganishga bag`ishlanadi. Maqola tegishli misollar yordamida yoritiladi hamda tahlil etiladi.

Kalit so'zlar: O`zaro qo`shma operator. Musbat operator. Chiziqli operator. To`la uzluksizoperator. Teskari operator. Ketma-ket yaqinlashish. Regulyarizatsiya.

KIRISH

Matematik fizika masalasini yechishda «masalaning yechimi» deganda nimani tushunamiz va bu yechimni aniqlaydigan usullar qanday shartga bo`ysunishi kerak degan savollar muhim hosoblanadi.

Ko`pchilik hollarda masalaning qo`yilishi amaliyotda keng uchraydigan jarayonlarning muhim xususiyatlarini hisobga olmaydi. Biz bu hollarni misollarda keltiramiz.

Yadrosi $K(x,s)$ bo`lgan Fredgolmning

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad a \le x \le b,$$

ko`rinishli birinchi tur integral tenglamasini qaraymiz. Bunda $z(x)$ $F$ fazoga qarashli noma"lum funksiya, $u(x)$ esa $U$ fazoga tegishli berilgan funksiya bo`lib, $K(x,s)$ yadro va uning hosilasi dK/dx larni x ga nisbatan uzluksiz deb faraz qilamiz.

Agar biz

$$A = \int_a^b K(x,s)z(s)ds$$

operatorni kiritsak, yuqoridagi tenglamani $Az = u$ birinchi tur operator tenglamako`rinishida yozish mumkin.

ASOSIY QISM

$$Ax = f \qquad (1)$$

da x va f mos ravishda X va F Gilbert fazosi elementlari bo`lib, $A$ -to`la uzluksizoperator bo`lsin.

Biz avval A opertorning o`zaro qo`shma va musbat bo`lgan holiga to`xtalamiz. Bu holda $F = X$ bo`ladi. B_α operatorlar oilasini

$B_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}, \alpha > 0$

ko`rinishda tanlaymiz va uning (1) tenglamaga nisbatan regulyarizatsiyalovchi operator ekanligini isbotlaymiz.

A operatorning to`liq xos funksiyalari sistemasini $\{\varphi_k\}$ va unga mos xos qiymatlari sistemasini $\{\lambda_k\}$ deymiz. U holda ixtiyoriy $x \in X$ elementni

$x = \sum x_k \varphi_k, \; x_k = (x, \varphi_k)$

ko`rinishda yozish mumkin. U holda

$$Ax = \sum_1^\infty \lambda_k x_k \varphi_k, \qquad B_\alpha Ax = \sum_1^\infty (\alpha + \lambda_k)^{-1} \lambda_k x_k \varphi_k,$$

bo`ladi. A operatorning to`la uzluksiz, o`zaro qo`shma hamda musbatligidan uningxos qiymatlari haqiqiy, musbat va u yagona limitik nuqtaga ega bo`lib, bu limitik nuqta $\lambda = 0$ dan iborat. Shuning uchun, $\{\lambda_k\}$ ni kamayish tartibida joylashtirish mumkinki, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ bo`ladi. A operatorning hamma xos qiymatlari musbatligidan ixtiyoriy musbat α lar uchun B_α uzluksiz operatorbo`ladi va

$$\|B_\alpha\| = \frac{1}{\alpha}$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi $x - B_\alpha Ax$ ayirma

$$x - B_\alpha Ax = \sum_1^\infty \left[1 - \lambda_k (\alpha + \lambda_k)^{-1}\right] x_k \varphi_k = \alpha \sum (\alpha + \lambda_k)^{-1} x_k \varphi_k,$$

agar $\alpha \to 0$. Bundan B_α operatorlar oilasining regulyarizatsiyalovchi operator ekanligini hosil qilamiz. Shunday qilib, biz qaralayotgan holda (1) tenglama uchunregulyarizatsiyalovchi oilani qurdik.

A operator o`zaro qo`shma va musbat bo`lmasin, lekin (1) tenglamaning yechimi yagona. Bu holda A operator spektriga nol nuqta taaluqli bo`lmaydi. (1) ning xar ikkala tomoniga A* operatorni qo`llab,

$$A^* Ax = A^* f = f_1 \quad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. (1) tenglama yechimining yagonaligidan (2) tenglamaning ham yechimi yagonaligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, (1) ning yechimi yagona bo`lsin. Agar

$A^* Ax = 0$

bo`lsa

$$(A^* Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = 0$$

bo`ladi. Bundan $x \equiv 0$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, A o`zaro qo`shma va musbat bo`lmagan hol, o`zaro qo`shmava musbat operatorli holga kelar ekan. Bu hol uchun regulyarizatsiyalovchi operatorlar oilasi

$$\overline{B}_\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1}$$

ko`rinishda bo`ladi. (1) tenglama uchun regulyarizatsiyalovchi operatorlar oilasi

$B_a = (aE + A)^{-1}$ bo`lganligidan B_a ni aniqlash uchun

$(aE + A)x = f$

tenglamani yechish kerak. Demak, (1) tenglama uchun regulyarizatsiyalovchi masalalar oilasi ikkinchi tur operator tenglamalar oilasidan iborat ekan.

(1) operator tenglamalarni yechishda ketma- ket yaqinlashish usulidan foydalanish mumkinligini qaraymiz. Bunda A- musbat aniqlangan va o`zaro qo`shma operator bo`lib, $\| A \| < 2$ bo`lgan holga to`xtalamiz. (1) tenglamani

$x - (E - A)x = f$ (3)

ko`rinishga keltiramiz. (3) tenglamaning yechimlarini ketma-ket yaqinlashish usulibilan echamiz. Buning uchun

$x_{k+1} = (E - A)x_k + f,\ x_0 = f$ (4)

formulalar orqali ketma-ket yaqinlashishlarni aniqlaymiz. (4) tenglikdan n – chiyaqinlashishlarni

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (E - A)^k f \qquad (5)$$

yig`indi orqali aniqlash mumkin. (5) ko`rinishli yaqinlashishlardan foydalanib B_n regulyarizatsiyalovchi operatorlar oilasini

$$B_n = \sum_{k=j}^{n} (E - A)^k \qquad (6)$$

ko`rinishda olamiz. $\{B_n\}$ ketma-ketlik orqali aniqlanadigan operatorlar oilasini (6) ko`rinishda oladigan bo`lsak, bu oilani (1) operator tenglama uchun regulyarizatsiyalovchi oila ekanligini ko`rish qiyin emas. Haqiqatdan ham,

$$x = \sum_{1}^{\infty} x_k \varphi_k \quad \text{va} \quad Ax = \sum_{1}^{\infty} \lambda_k x_k \varphi_k$$

tengliklardan

$$B_n A x = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{n} (1 - \lambda_k)^j \right] \lambda_k x_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - (1 - \lambda_k)^{n+1} \right] x_k \varphi_k$$

kelib chiqadi.

Oxirgi tenglikdan $\lim_{n\to\infty} B_n Ax = x$ ga ega bo`lamiz. Bundan $\{B_n\}$ operatorlarning (1) tenglama uchun regulyarizatsiyalovchi operator ekanligi kelib chiqadi.

Endi A operatorning aniqlanishiga asosan $\|E - A\| < 1$ ni hosil qilamiz, bundan $\|B_n\| = n$ ekanligini ko`rish oson.

Umumiy ko`rinishli (1) operator tenglama uchun regulyarizatsiyalovchi operatorlar oilasi qilib,

$$B_n = \mu \sum_{k=0}^{\infty} (E - \mu A^* A)^k A^*$$

operatorlar ketma-ketligini olish mumkin. Bunda $\mu < 2\| A^* A\|$ bo`ladi.

ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последствием. Дис. док. физ-мат. Наука. 2019. 245 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск.: Сибирское научное издетелство, 2019. – 457 с.
3. Прилепко А.И. Об обратных задачах теории потенциала. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т.3. С. 30-44.
4. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптическых уравнений. //Докл. АН СССР, 2014. Т. 277. №6. С. 1335 – 1337.
5. Хайдаров А., Шодиев Д.С. О единственности решения обратных задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Узб. мат. журнал. 2012. 76-78 стр.