2×2 OPERATORLI MATRITSALAR OILASINING SONLI TASVIRI HAQIDA

Mallayev Azizbek Mustafo o'g'li
Buxoro davlat universiteti
Fizika-matematika fakulteti magistri

Annotatsiya. Ushbu maqolada uch oʻlchamli panjarada soni ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos 2×2 operatorli matritsa $\mathcal{A}_\mu$ (umumlashgan Fridrixs modeli) qaraladi. Uning sonli tasvirining tuzulishi tahlil qilngan.

Kalit soʻzlar. Muhim spektr, diskret spektr, xos qiymat, operatorli matritsa, sonli tasvir.

ON THE NUMERICAL RANGE OF THE FAMILY OF 2×2 OPERATOR MATRICES

Mallayev Azizbek Mustafo ugli
Master Student, Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University

Annotation. In this article, the 2×2 operator matrix $\mathcal{A}_\mu$ (generalized Friedrichs model) corresponding to a system of particles with no more than two particles on a three-dimensional lattice is considered. The structure of its numerical range is analyzed.

Keywords. Essential spectrum, discrete spectrum, eigenvalue, operator matrix, numerical range.

Faraz qilaylik, $\mathcal{H}$ - kompleks Gilbert fazosi va $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - chiziqli operator boʻlib, $D(A) \subset \mathcal{H}$ uning aniqlanish sohasi boʻlsin. Ushbu

$$W(A) := \{(Ax, x): x \in D(A), ||x|| = 1\}$$

toʻplamga A operatorning sonli tasviri deyiladi. Umumiy holda $W(A)$ toʻplam ochiq toʻplam ham yopiq toʻplam ham boʻlmaydi. $W(A)$ ochiq toʻplam boʻladigan, yopiq toʻplam boʻladigan hamda ochiq ham yopiq ham boʻlmaydigan chiziqli operatorlarga koʻplab misollar keltirish mumkin. Aniqlanishiga koʻra $W(A)$ toʻplam kompleks sonlar toʻplamining qism toʻplami boʻlib, $W(A)$ toʻplamning geometrik xossalaridan foydalanib A operator haqida koʻplab maʼlumotlarni olish mumkin.

Sonli tasvir tushunchasi birinchi marotaba [1] sonli matritsalar uchun kiritilgan. Bunda matritsaning sonli tasviri uning barcha xos qiymatlarini saqlashi va bunday toʻplamning chegarasi qavariq chiziq boʻlishi isbotlangan. [2] ishda esa $W(A)$ ning qavariq to‘plam ekanligi isbotlangan. Keyinchalik [3] ishda chiziqli chegaralangan operator ham bunday xossaga ega bo‘lishi va uning spektri sonli tasvir yopig‘i $\overline{W(A)}$ to‘plamda yotishi ko‘rsatilgan. [4-7] ishlarda umumlashgan Fridrixs modeli uchun sonli tasvir tahlil qilingan.

Aytaylik $\mathbb{T}^3 - 3$ o‘lchamli tor bo‘lsin, ya’ni $\mathbb{T}^3 := (-\pi;\pi]^3$. $L_2(\mathbb{T}^3)$ orqali $\mathbb{T}^3$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz. $\mathcal{H}$ bilan $\mathcal{H}_0 \coloneqq \mathbb{C}$ va $\mathcal{H}_1 \coloneqq L_2(\mathbb{T}^3)$ fazolarning to‘g‘ri yig‘indisini belgilaymiz, ya’ni $\mathcal{H} \coloneqq \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Odatda $\mathcal{H}_0$ va $\mathcal{H}_1$ fozalar mos ravishda $L_2(\mathbb{T}^3)$ ustiga qurilgan $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^3)$ fok fazosining nol zarrachali va bir zarrachali qism fazolari deb ataladi.

$\mathcal{H}$ fazoda ta’sir qiluvchi

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} A_{00} & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}$$

2×2 operatorli matritsani qaraymiz. Bu yerda uning $A_{ij}\colon \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i,\ i \leq j, i, j = 0{,}1$ matritsaviy elementlari quyidagi tengliklar bilan aniqlangan:

$$A_{00}f_0 = \varepsilon f_0,\quad A_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v(t) f_1(t)dt,\quad (A_{11}f_1)(x) = u(x)f_1(x),$$

bunda $f_i \in \mathcal{H}_i, i = 0{,}1$; ε –haqiqiy son, $v(\cdot) - \mathbb{T}^3$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli analitik funksiya, $u(\cdot)$ funksiya esa

$$u(x) = \sum_{i=1}^{3}(1 - cos3x_i),\quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$$

tenglik bilan aniqlangan. A_{01}^* operator A_{10} operatorga qo‘shma operator bo‘lib,

$$(A_{01}^* f_0)(x) = v(x) f_0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$\sigma(\cdot), \sigma_{ess}(\cdot)\ va\ \sigma_{disc}(\cdot)$ orqali mos ravishda chiziqli chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorning spektri, muhim, spektri va diskret spektrini belgilaymiz.

$\mathcal{H}$ fazoda quyidagi

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}$$

operatorli matritsani qaraylik.

Ma’lumki $\mathcal{A}_0$ operatorning qo‘zg‘alishi $\mathcal{A}_\mu - \mathcal{A}_0$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operator rangi 2 ga teng. U holda chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning saqlanishi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra $\mathcal{A}_\mu$ operatorning muhim spektri $\mathcal{A}_0$ operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi, ya’ni, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_\mu) = \sigma_{ess}(\mathcal{A}_0)$.

Aniqlanishiga ko‘ra $\mathcal{A}_0$ operatorning muhim spektri $u(\cdot)$ funksiyaning qiymatlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

$$\min_{x\in\mathbb{T}^3} \sum_{i=1}^{3}(1 - cos3x_i) = 0\,;\quad \max_{x\in\mathbb{T}^3} \sum_{i=1}^{3}(1 - cos3x_i) = 6$$

munosabatlardan foydalansak , $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) = [0; 6]$.

Shuningdek, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) = [0;6]$.

$\mathbb{C}\backslash[0,6]$ da analitik bo‘lgan

$$\Delta_{\mu}(\varepsilon;z) = \varepsilon - z - \mu\int_{\mathbb{T}^3}\frac{v^2(t)dt}{u(t)-z}$$

funksiyani aniqlaymiz.

1-lemma. $z \in \mathbb{C}\backslash[0,6]$ *soni* $\mathcal{A}_\mu$ *operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun* $\Delta_\mu(z) = 0$ *bo‘lishi zarur va yetarli.*

Yuqoridagi lemmadan $\mathcal{A}_\mu$ operatorning diskret spektri uchun quyidagi munosabat hosil bo‘ladi:

$$\sigma_{disc}(\mathcal{A}_\mu) = \{z \in \mathbb{C}\backslash[0,6]: \Delta_\mu(z) = 0\}.$$

Agar $\mathcal{A}_\mu$ operator manfiy xos qiymatga ega bo‘lsin, uni $\lambda_1(\varepsilon,\mu)$ orqali,agar 6 dan katta xos qiymatga ega bo‘lsa, uni $\lambda_2(\varepsilon,\mu)$ orqali belgilaymiz.

1-teorema. $\varepsilon \le 0$ *bo‘lsin.*

1. *Agar* $0 \le \mu \le (6-\varepsilon)\mu_1$ *bo‘lsa , u holda* $\overline{W(\mathcal{A}_\mu)} = [\lambda_1(\varepsilon,\mu);6]$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

2. *Agar* $\mu > (6-\varepsilon)\mu_1$ *bo‘lsa, u holda* $(\mathcal{A}_\mu) = [\lambda_1(\varepsilon,\mu)\ ;\lambda_2(\varepsilon,\mu)]$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

Isbot. $\varepsilon \le 0$ bo‘lsin. U holda μ parameterning barcha musbat qiymatlarida $\Delta_\mu(\varepsilon;0) < 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

$\lim\limits_{z\to-\infty}\Delta_\mu(\varepsilon;z) = +\infty$ tenglikni inobatga olsak, $\Delta_\mu(\varepsilon;\cdot)$ funksiya $(-\infty;0)$ intervalda monoton kamayuvchi va uzluksiz bo‘lganligi uchun funksiya yagona manfiy nolga ega. 1-lemmaga ko‘ra bu nol $\mathcal{A}_\mu$ operator uchun xos qiymat bo‘ladi.Bu xos qiymatni $\lambda_1(\varepsilon,\mu)$ orqali belgilaymiz.

1. $0 < \mu \le (6-\varepsilon)\mu_1$ bo‘lsin. Sodda hisoblash yordamida $(\varepsilon;6) < 0$ bo‘lishini ko‘rish mumkin.

$\lim\limits_{z\to+\infty}\Delta_\mu(\varepsilon;z) = -\infty$ tenglikni inobatga olsak, $\Delta_\mu(\varepsilon;\cdot)$ funksiyaning $(6;\infty)$ intervalda uzluksiz va monoton kamayuvchi bo‘lishidan $\Delta_\mu(\varepsilon;\cdot)$ funksiya $(6;+\infty)$ intervalda nolga ega emas. 1-lemmaga ko‘ra $\mathcal{A}_\mu$ operator 6 dan katta xos qiymatga ega emas.

Yuqoridagi mulohazalardan $\sigma(\mathcal{A}_\mu) = \{\lambda_1(\varepsilon,\mu)\}\cup[0;6]$, $\lambda_1(\varepsilon,\mu) < 0$ tenglik kelib chiqadi.

$\mathcal{A}_\mu$ operator sonli tasvirining yopig‘i $\sigma(\mathcal{A}_\mu)$ to‘plamning qavariq qoplamasidan iborat, bundan $\overline{W(\mathcal{A}_\mu)} = [\lambda_1(\varepsilon,\mu);6]$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

2. $\mu > (6-\varepsilon)\mu_1$ bo‘lsin. Yuqoridagi kabi mulohaza yaritib $\mathcal{A}_\mu$ operator $(6;+\infty)$ da yagona $\lambda_2(\varepsilon,\mu)$ xos qiymatga ega bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

U holda

$$\sigma(\mathcal{A}_\mu) = \{\lambda_1(\varepsilon,\mu)\} \cup [0;6] \cup \{\lambda_2(\varepsilon,\mu)\},\ \lambda_1(\varepsilon,\mu) < 0,\ \lambda_2(\varepsilon,\mu) > 6.$$

U holda ko‘rinib turibdiki

$$\inf_{\|f\|=1} (\mathcal{A}_\mu f, f) = \lambda_1(\varepsilon,\mu)$$

va

$$\sup_{\|f\|=1} (\mathcal{A}_\mu f, f) = \lambda_2(\varepsilon,\mu)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Demak, $\overline{W(\mathcal{A}_\mu)} = [\lambda_1(\varepsilon,\mu); \lambda_2(\varepsilon,\mu)]$.

Endi esa $\lambda_1(\varepsilon,\mu), \lambda_2(\varepsilon,\mu) \in W(\mathcal{A}_\mu)$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$f^{(1)} \in \mathcal{H}$ va $f^{(2)} \in \mathcal{H}$ mos ravishda $\lambda_1(\varepsilon,\mu)$ va $\lambda_2(\varepsilon,\mu)$ xos qiymatlarga mos normallangan vektor-funksiyalar bo‘lsin.

U holda

$$\min_{\|f\|=1} (\mathcal{A}_\mu f, f) = (\mathcal{A}_\mu f^{(1)}, f^{(1)}) = \lambda_1(\varepsilon,\mu);$$

$$\max_{\|f\|=1} (\mathcal{A}_\mu f, f) = (\mathcal{A}_\mu f^{(2)}, f^{(2)}) = \lambda_2(\varepsilon,\mu)$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Bundan esa $\lambda_i(\varepsilon,\mu) \in W(\mathcal{A}_\mu), i = 1,2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Teorema to’liq isbotlandi.

Xuddi shu kabi quyidagicha teoremalarni isbotlash mumkin.

2-teorema. $0 < \varepsilon < 6$ *bo‘lsin.*

1. *Agar* $\mu > max\{\varepsilon\mu_0, (6-\varepsilon)\mu_1$ *bo‘lsa, u holda* $W(\mathcal{A}_\mu) = [\lambda_1(\varepsilon,\mu); \lambda_2(\varepsilon,\mu)]$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

2. *Agar* $\varepsilon\mu_0 < (6-\varepsilon)\mu_1$ *va* $\mu \in (\varepsilon\mu_0; (6-\varepsilon)\mu_1]$ *bo‘lsa, u holda* $\overline{W(\mathcal{A}_\mu)} = [\lambda_1(\varepsilon,\mu); 6]$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

3. *Agar* $\varepsilon\mu_0 > (6-\varepsilon)\mu_1$ *va* $\mu \in ((6-\varepsilon)\mu_1, \varepsilon\mu_0]$ *bo‘lsa, u holda* $\overline{W(\mathcal{A}_\mu)} = [0; \lambda_2(\varepsilon,\mu)]$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

4. *Agar* $\mu < min\{\varepsilon\mu_0, (6-\varepsilon)\mu_1\}$ *bo‘lsa, u holda* $\overline{W(\mathcal{A}_\mu)} = [0;6]$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

3-teorema. $\varepsilon \geq 6$ *bo‘lsin.*

1. *Agar* $0 < \mu \leq \varepsilon\mu_0$ *bo‘lsa, u holda* $\overline{W(\mathcal{A}_\mu)} = [0; \lambda_2(\varepsilon,\mu)]$ *tenglik o‘rinli;*

2. $\mu > \varepsilon\mu_0$ *bo‘lsa, u holda* $W(\mathcal{A}_\mu) = [\lambda_1(\varepsilon,\mu); \lambda_2(\varepsilon,\mu)]$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

Chiziqli chegaralangan $n \times n$ bolk operatorli matritsalar uchun operatorlarning sonli tasviri bilan bir qatorda uning blok sonli tasviri ham qaraladi. [8] ishda blok sonli tasvirning asosiy xossalari keltirilgan hamda spectral munosabatlar deb ataluvchi tasdiq isbotlangan. [9-32] maqolalarda umumlashgan Fridrixs modelining spektral xossalari yordamida panjaradagi soni saqlanmaydigan va 3 tadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos operatorli matrisalarning spektri taqdid qilingan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Toeplitz O. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer. Math. Z., 2:1-2 (1918), pp. 187-197.

2. Hausdorff F. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z., 3:1 (1919), pp. 314-316.

3. Wintner A. Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z., 30:1 (1929), pp. 228-281.

4. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Связь между числовым образом и спектром модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Молодой ученый*, 9, 2015, 20-23.

5. Э.Б. Дилмуродов. Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15, 2017, 105-106.

6. Э.Б. Дилмуродов. Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15, 2017, 105-106.

7. T.Kh.Rasulov, E.B.Dilmurodov. Investigations of the numerical range of a operator matrix. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. and Math. Sci. 35:2, 2014, pp. 50-63.

8. Tretter C., Wagenhofer M. The block numerical range of an nxn block operator matrix. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24:4 (2003), pp. 1003-1017.

9. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Eigenvalues and virtual levels of a family of 2x2 operator matrices. *Methods Func. Anal. Topology*, 1(25), 2020, 273-281.

10. T.H. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Threshold analysis for a family of 2x2 operator matrices. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 6(10), 2019, 616-622.

11. Т.Х. Расулов, Э.Б. Дилмуродов. Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205), 2020, 368-390.

12. E.B. Dilmurodov. On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. *Scientific reports of Bukhara State University*, 1, 2019, 42-46.

13. E.B.Dilmurdov. Discrete eigenvalues of a 2×2 operator matrix. arXiv preprint arXiv:2011.09650, 2020

14. Э.Б. Дилмуродов. Квадратичный числовой образ одной 2x2 операторной матрицы. *Молодой ученый*, 8, 2016, 7-9.

15. T.Kh. Rasulov, E.B. Dilmurodov. Estimates for quadratic numerical range of a operator matrix. *Uzbek Math. Zh.*, 1, 2015, 64-74.

16. Х.Г. Хайитова. О числе собственных значений модели Фридрихса с двумерным возмущением. *Наука, техника и образование*, 8(72), 2020, 5-8.

17. Т.Х. Расулов, Б.И. Бахронов. О спектре тензорной суммы моделей Фридрихса. *Молодой учёный*, 9, 2015, 17-20.

18. Б.И. Бахронов. Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением. *ВНО*, 16-2(94), 2020, 9-13.

19. Н.А. Тошева.. Уравнения Вайнберга для собственных вектор-функций семейства 3x3-операторных матриц. *Наука, техника и образование*, 8(72), 2020, 9-12.

20. T.H. Rasulov, N.A. Tosheva. Analytic description of the essential spectrum of a family of 3x3 operator matrices. *Nanosystems: Phys., Chem., Math.*, 5(10), 2019, 511-519.

21. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

22. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

23. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

24. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

25. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

26. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical

systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

27. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

28. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

29. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

30. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

31. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

32. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).