CHIZIQLI CHEGARALANGAN OPERATORLAR. O'Z-O'ZIGA QO'SHMA OPERATORLAR VA UNING SPEKTRI. MUSBAT VA UNITAR OPERATORLAR

Hayitova Mohidil Alijon qizi
Buxoro davlat universiteti
Fizika-matematika fakulteti magistri

Annotatsiya: Maqolada chiziqli chegaralangan operatorlar, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va uning spektri hamda musbat va unitar operatorlar haqida tushuncha, teoremalar, lemmalar va ularga doir misollar keltirib ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Gilbert fazosi, chiziqli chegaralangan operatorlar, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar, musbat va unitar operatorlar.

LINEAR BOUNDED OPERATORS. SELF-ADDITIONAL OPERATORS AND ITS SPECTRUM. POSITIVE AND UNITARY OPERATORS

Hayitova Mohidil Alijon qizi
Master Student, Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University

Annotation: In the article Linear Bounded operators self about joint operators and the spectrum of Y and positive and unitary operators the concept, theorems, lemmas and examples of them are cited.

Keywords: Hilbert space, Liner Bounded operators, self-self adjoint operators, positive and unitary operators.

Bizga $X \; va \; Y$ normalangan fazolar berilgan bo'lsin. Quyidagi ta'rifni kiritamiz:

Ta'rif: X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi

$$Ax = y \qquad (x \in X, \;\; y \in Y)$$

akslantirishga operator deyiladi.

Umuman olganda A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bunday holatda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ kabi belgilanadi:

$$D(A) = \{\exists x \in X\colon Ax \;\; mavjud \;\; va \; Ax \in Y\}.$$

Chiziqli A operator qaralayotgan bo'lsa, u holda $D(A)$ ning chiziqli ko'p xillik bo'lishi talab qilinadi, ya'ni $x, y \in D(A)$ bo'lsa, ixtiyoriy $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$ o'rinli bo'ladi.

Ta'rif: Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementar va $\forall \alpha, \beta \in C$ sonlar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A operatorga chiziqli operator deyiladi.

Ta'rif: $A: X \to Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo'lsin, agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning $\forall\, \mathcal{E}$ atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in \mathcal{E}$ bo'lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarila, A ga $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif: Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi $\forall\, \{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$ shart o'rinli bo'lsa, unda A operator shu x_0 nuqtada uzluksiz deb aytiladi.

Ta'rif: Quyidagi

$$Ax = \theta$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ nuqtalar to'plami A operatorning yadrosi deb aytiladi va $KerA$ kabi belgilanadi.

Ta'rif: Biror bir $x \in D(A)$ nuqta uchun $y = Ax$ tenglik bajariladigan $y \in Y$ lar to'plami A operatorning qiymtlar sohasi yoki tasviri deyiladi va ImA yoki $R(A)$ kabi belgilanadi.

Operator yadrosi va qiymatlar sohasini matematik formulalar yordamida quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$KerA = \{\exists x \in D(A): Ax = \theta\},$$

$$R(A) \coloneqq ImA = \{\exists y \in Y: biror\ x \in D(A)\ uchun\ y = Ax\}$$

A chiziqli operator qiymatlar sohasi va yadrosi chiziqli ko'pxillik bo'la oladi. Agar $D(A) = X$ bo'lib, A operator uzluksiz operator bo'lsa, unda $KerA$ yopiq qism fazo bo'ladi. Ya'ni $KerA = [KerA]$ bo'ladi. A uzluksiz bo'lgan holatda ham $ImA \subset Y$ yopiq qism fazo bo'lmasligi ham mukin.

Ta'rif: Faraz qilaylik X normalangan fazoning M to'plami berilgan bo'lsin, u holda shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $x \in M$ uchun $\|x\| \leq C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, M to'plamga chegaralangan to'plam deyiladi.

Ta'rif: X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator bo'lsin. Agar A operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = X$ bo'lib, ixtiyoriy chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, u holda A operatorga chegaralangan operator deyiladi.

Ta'rif: Faraz qilaylik $A: X \to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar shunday $C > 0$ son mavjud bo'lib, $\forall x \in D(A)$ uchun quyidagi

$$\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$$

tengsizlik bajarilsa, A operatorga chegaralangan operator deyiladi.

Ta'rif: $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va $\|A\|$ kabi belgilanadi:

$$\|A\| = \inf C.$$

Teorema: X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli chegaralangan A operatorning normasi $\|A\|$ uchun quyidagi

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

A operator chiziqli bo'lgani uchun:

$$\alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \theta} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Ixtiyoriy $x \neq \theta$ uchun

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha \text{ bo'ladi.}$$

Demak, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|Ax\| \leq \alpha\|x\|$. Bundan esa

$$\|A\| \leq \alpha. \qquad (1.1)$$

Aniq yuqori chegara ta'rifidan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $x_\varepsilon \neq 0$ element mavjud bo'lib,

$$\alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \leq \|A\|$$

tengsizlik bajariladi. Bundan $\varepsilon > 0$ soni ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$\alpha \leq \|A\| \qquad (1.2)$$

1.1 va 1.2 ga ko'ra $\|A\| = \alpha$ tenglik kelib chiqadi.

Tasdiq: A-chiziqli chegaralangan operator uchun

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

tenglik o'rinli.

X chiziqli normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $L(X,Y)$ chiziqli chegaralangan operatorlar to'plami deb belgilymiz, Agar $X = Y$ bo'lsa, $L(X,Y) = L(X)$ bo'ladi.

Ta'rif: $A: X \to Y$ va $B: X \to Y$ chiziqli operatorlarning yig'indisi deb $x \in D(A) \cap D(B)$ elementga $y = Ax + By \in Y$ elementni mos qo'yuvchi

$C = A + B$ operatorga aytiladi.

Ma'lumki, C chiziqli operator bo'ladi, agar $A, B \in L(X,Y)$ bo'lsa, unda C operator chegaralangan operator ham bo'ladi, ya'ni:

$$\|C\| = \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

shart o'rinli bo'ladi. Chindan ham,

$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| \leq (\|A\| +$
$+\|B\|)\|x\|$.

Bu shartdan

$$\|C\| = \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Ta'rif: $A: X \to Y$ va $B: X \to Y$ chiziqli operatorlar berilgan bo'lib $R(A) \subset D(B)$ bo'lsin, B va A operatorlarning ko'paytmasi deb, har bir $x \in D(A)$ elementga Z fazoning $z = B(Ax)$ elementini mos qo'yuvchi $C = BA: X \to Z$ operatorga aytiladi.

Agar A va B operatorlar chiziqli chegaralangan operatorlar bo'lsa, C operator ham chiziqli chegaralangan operator bo'ladi:

$$\|C\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \qquad (1.3)$$

shart o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan

$$\|Cx\|_Z = \|B(Ax)\|_Z \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_Y \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X$$

tengsizligidan (1.3) tengsizligi kelib chiqadi.

Operatorlarni ko'paytirish va qo'shish assotsativ amallardir. Qo'shish amali kommutativ, ammo ko'paytirish amali kommutativ emasdir.

Agar X va Y fazolar chiziqli normalangan fazolar bo'lsa, u holda $L(X, Y)$ fazo ham chiziqli normalangan fazo bo'ladi:

$$p: L(X, Y) \to R, \qquad p(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Teorema: X normalangan fazoni Y normalangan fazoga akslantiruvchi $A: X \to Y$ chiziqli operator berilgan bo'lsin, u holda quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi:

1) A operator biror x_0 nuqtada uzluksiz;
2) A operator uzluksiz;
3) A operator chegaralangan;

Isboti: A chiziqli operator biror x_0 nuqtada uzluksizligidan uning ixtiyoriy nuqtada uzluksizligini keltirib chiqaramiz.

A oprator x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi sababli, x_0 nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n^0\}$ ketma-ketlik uchun $Ax_n^0 \to Ax_0$. Ixtiyoriy $x' \in D(A)$ nuqta uchun $x_n' \to x'$ ekanligidan $Ax_n' \to Ax'$ kelib chiqishini ko'rsatamiz.:

$$y_n' = x_n' - x' + x_0 \to x_0$$

bo'lsin, u holda

$$\lim_{n\to\infty} Ay_n' = \lim_{n\to\infty} (Ax_n' - Ax' + Ax_0) = Ax_0.$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n' = Ax'$$

kelib chiqadi. Demak, A operator ixtiyoriy x' nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Endi A operatorning uzluksiz ekanligidan uning chegaralanganligi kelib chiqishini ko'rsatamiz. Teskarisidan faraz qilamiz, A chiziqli operator uzluksiz bo'lsin, ammo chegaralanmagan bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy $C > 0$ son uchun shunday $x_c \in D(A)$ element mavjud bo'lib,

$$\|Ax_n\| \geq C\|x_c\|$$

bo'lsin, agar $C = n \in N$ desak, ixtiyoriy $n \in N$ uchun shunday $x_n \in D(A)$ mavjudki,

$$\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Quyidagi

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$$

ketma-ketlikni qaraymiz, ma'lumki, $\xi_n \to \theta$, ya'ni

$$\|\xi_n - \theta\| = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0.$$

Ikkinchi tomondan:

$$\|A\xi_n - A\theta\| = \left\|A\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{n\|x_n\|}Ax_n\right\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > 1.$$

Bu qarama-qarshilik A operatorning chegaralanganligini ko'rsatadi.

Ana endi A chiziqli chegaralangan operatorning biror nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz:

Shunday $C > 0$ son mavjudki, ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin, unda $Ax_n \to Ax$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \to 0$$

ya'ni $Ax_n \to Ax$.

1.1.2-misol: $A: AC_0[0;1] \to L_1[0;1]$, $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ differensiallash operatorini chiziqli chegaralanganligini ko'rsatib, uning normasini toping.

Yechish: $[a;b]$ kesmada absolyut uzluksiz F funksiyaning hosilasi $F'(x) = f(x)$ integrallanuvchidir. Demak operatorning aniqlanish sohasi $D(A) = AC_0[0;1]$ uchun $\|Ax\| = \|x\|$ tenglik o'rinli. Bu yerdan A operatorning chegaralanganligini va $\|A\| = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Misol: l_2 fazoda ko'paytirish operatori, ya'ni

$$A: l_2 \to l_2, \qquad (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n\geq 1}\|a_n\| = a < \infty$$

operatorni qaraymiz. Bu operatorning chegaralanganligini ko'rsatib va uning normasini topamiz.

Yechish: Ixtiyoriy $x \in l_2$ uchun $Ax \in l_2$ ekanini ko'rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n x_n|^2 \leq \sup_{n\geq 1}|a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \leq a^2\|x\|^2$$

Bu shartlardan $D(A) = l_2$ ekanligi kelib chiqadi. Endi uni chiziqlilikka tekshiramiz:

A operatorning aniqlanishiga ko'ra

$$(A(\alpha x + \beta y))_n = a_n(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a_n x_n + \beta a_n y_n = \alpha(Ax)_n + \beta(Ay)_n$$

bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, A chiziqli operator.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n x_n|^2 \leq \sup_{n\geq 1}|a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \leq a^2\|x\|^2$$

tengsizligiga ko'ra A operatorning chegaralangan ekanligini ko'rishimiz mumkin va bundan tashqari yuqoridagi tengsizlikka ko'ra $\|A\| \leq a$ ekanligi kelib chiqadi va bundan $\|A\| = a$ bo'lishini isbotlaymiz. Bu uchun l_2 fazodan normasi 1ga teng bo'lgan ketma-ketlik $\left\{e_n = \left(\underbrace{0,0,\dots 0,1}_{n}, 0, \dots\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ni qaraymiz.

A operatorning aniqlanishiga ko'ra $\forall n \in N$ uchun $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bunga ko'ra esa

$$\|A\| \geq \|Ae_n\| = \|a_n e_n\| = |a_n| \|e_n\| = |a_n|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik $\forall n \in N$ da o'rinli ekanidan

$$\|A\| \geq \sup_{n \geq 1} |a_n| = a$$

munosabatni olamiz. Xulosa qilish mumkinki demak, $\|A\| = a$ isbotlandi.

O'z-o'ziga qo'shma operatorlar va uning spektri

Bizga H- Gilbert fazosi va $A \in L(H)$ operator berilgan bo'lsin. Agar $\forall x, y \in H$ elementlari uchun quyidagi

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

shartni qanoatlantiruvchi A^* operatorga A ning qo'shmasi deyiladi va agar $A^* = A$ tenglik o'rinli bo'lsa, ya'ni $\forall x, y \in H$ elementlar uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A operatorga o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

Lemma: H- kompleks Gilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan chegaralangan A operatorning barcha xos qiymatlari haqiqiy bo'ladi.

Isboti: Chindan ham, $Ax = \lambda x$ tenglama $x \neq \theta$ yechimga ega bo'lsin, unda:

$$\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan $\lambda = \bar{\lambda}$ shrt o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Lemma: Operator o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan bo'lsa, u holda har qanday xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonal bo'ladi.

Isboti: Chindan ham, agar $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ va $\lambda = \mu \neq 0$ bo'lsa, unda

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$

bo'ladi.

Bunga ko'ra esa $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$ ekanligi, ya'ni $x \perp y$ kelib chiqadi.

$A \in L(H)$ o'z-o'ziga qo'shma operator va λ kompleks soni uchun $A_\lambda = A - \lambda E$ operatorlarning oilasini ko'ramiz.

Bizga ma'lumki, agar $\|\lambda^{-1} A\| < 1$, ya'ni $|\lambda| > \|A\|$ bo'lsa, unda λ soni A operator uchun regulyar qiymat bo'ladi. Shuning uchun A operator spektri $|\lambda| \leq \|A\|$ doiraning ichida va chegarasida joylashadi. Bu tasdiq Banax fazosida ta'sir etuvchi ixtiyoriy operator uchun operator spektrini joylashgan o'rnini aniq tavsiflash mumkin bo'ladi.

Teorema: λ kompleks soni o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan A operator regulyar qiymati bo'lishi uchun shunday $C > 0$ son topilib, hamma $x \in H$ nuqtalarda

$$\|A_\lambda x\| = \|Ax - \lambda x\| \geq C\|x\|$$

tengsizlik ning bajarilishi zarur va yetarkidir.

Teorema: $\lambda = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$ kompleks soni o'z-o'ziga qo'shma bo'ladigan A operatorning regulyar qiymatidir.

Teorema: O'z-o'ziga qo'shma bo'lgan A operatorning spektri haqiqiy sonlar o'qidagi $[m, M]$ kesmada yotadi, bu yerda

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

Teorema: Agar A operator o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsa, unda $m \ va \ M$ sonlari A ning spektriga tegishli bo'ladi.

Isbot: M soni uchun isbotini keltiramiz. Shuni aytib o'tish kerakki, agar A operatori A_μ operatoriga almashtirilsa, unda uning spektri μ birlik chapga siljiydi. $m \ va \ M$ sonlari esa mos ravishda $m - \mu$ va $M - \mu$ sonlariga o'zgaradi. Shuning uchun umumiy holatni buzmagan holatda $0 \leq m \leq M$ deb hisoblash mumkin. Bu holatda $M = \|A\|$ o'rinli bo'ladi. M soni A operatorning spektriga tegishli bo'lishini ko'rsatamiz.

$M = \|A\|$ sonini aniqlanishiga ko'ra shunday $\{x_n\}$ ketma-ketlik topib, $\|x_n\| = 1$ va

$$(Ax_n, x_n) = M - \delta_n, \delta_n \to 0, n \to \infty$$

bo'ladi. Bundan tashqari$\|Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x_n\| = \|A\| = M$

bo'ladi. Shuning uchun $\|Ax_n - Mx_n\| = (Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n) ==$
$\|Ax_n\|^2 - 2M(Ax_n, x_n) + M\|x_n\|^2 \leq\leq M^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 = 2M\delta_n$

yoki $\|Ax_n - Mx_n\| \to 0, \|x_n\| = 1$ bo'ladi.

Natija: Ixtiyoriy o'z-o'ziga qo'shma operator bo'sh bo'lmagan spektrga ega bo'ladi.

Tasdiq: $\lambda \in C \setminus [0; 1]$ kompleks soni A ning xos qiymati bo'lishi uchun

$$\Delta\lambda := 1 + \int_0^1 \frac{s^2}{s - \lambda} ds = 0$$

tenglikni isbotlashimiz zarur va yetarlidir.

Isboti: (Zaruriyligi) Aytaylik, $\lambda \in C \setminus [0; 1]$ A ning xos qiymati bo'lsin: biror nolmas $x \in L_2[0; 1]$ element uchun $Ax(t) = tx(t) + \int_0^1 tsx(s)ds = \lambda x(t)$

tenglik o'rinli bo'lsin. Unda$(t - \lambda)x(t) + t\alpha_x = 0 \quad \alpha_x = \int_0^1 sx(s)ds$ bo'ladi. Bunda agar $\alpha_x = 0$ bo'lsa, $(t - \lambda)x(t) + t\alpha_x = 0$ tenglik $(t - \lambda)x(t) = 0$ tenglikka aylanadi. Bu yerdan x ning qiymati nolga teng bo'lishiga ega bo'lamiz. Tanlanishiga ko'ra esa $x \neq 0$. Demak, shunday ekan, $\alpha_x \neq 0$.

$(t-\lambda)x(t)+t\alpha_x=0$ tenglikdan $x(t)=-\frac{\alpha_x \cdot t}{t-\lambda}$ ni topib olamiz va bu tenglikni $\alpha_x=\int_0^1 sx(s)ds$ ga qo'yib $\alpha_x=-\alpha_x\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds$ tenglikka erishamiz. $\alpha_x\neq 0$ bo'lganidan

$$\Delta(\lambda) = 1+\int_0^1 \frac{s^2}{s-\lambda}ds=0$$

tenglik hosil bo'ladi.

(Yetarliligi) Aytaylik, $\lambda \in C \setminus [0;1]$ kompleks son uchun $\Delta\lambda = 0$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Unda $x(t)=t(t-\lambda)^{-1}$ funksiyani olamiz, $(A-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)\frac{t}{t-\lambda}+t\int_0^1 s\frac{s}{s-\lambda}ds=t\left(1+\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds\right)=t\Delta(\lambda)=0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan λ son A operator uchun xos qiymat bo'lishi va $x(t)=\frac{t}{t-\lambda}$ unga mos xos funksiya bo'lishi kelib chiqadi. A ning $[0;1]$ kesmadan tashqaridagi xos qiymatlarini topamiz:

Barcha $-\lambda$ lar uchun $\Delta(\lambda)=1+\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds\geq 1$ tengsizlik o'rinli. Bundan tashqari $Im\lambda\neq 0$ bo'lsa $\Delta(\lambda)\neq 0$ hosil qilish murakkab emas. 1.1.1-tasdiqqa ko'ra A operator $\lambda>1$ xos qiymatlarga ega bo'lishi mumkin. Aytaylik $\lambda>1$ bo'lsin, unda

$\Delta'(\lambda)=\int_0^1\frac{s^2}{(s-\lambda)^2}ds>0$ $\lim_{\lambda\to 1}\Delta(\lambda)=-\infty$; $\lim_{\lambda\to\infty}\Delta(\lambda)=1$

shartlar o'rinli bo'ladi. Bundan $(1;\infty)$ intervalda $\Delta(\lambda)$ ning o'sishi va yagona $\lambda_0\in(1;\infty)$ nuqtada $\Delta(\lambda_0)=0$ tenglik bajarilishi hosil bo'ladi. Shunday qilib, $[0;1]$ kesmadan boshqa A ning bitta xos qiymati mavjud ekanligiga erishamiz. Masalan, $\lambda\in C\setminus[0;1]$ son A ning xos qiymati bo'lmasin. $A-\lambda I$ operatorga teskari operatorni aniqlaymiz:

$$(A-\lambda I)x(t)=(t-x)x(t)+t\int_0^1 sx(s)ds=y(t), \quad x,y\in L_2[0;1]$$

tenglikdan $\alpha_x=\int_0^1 sx(s)ds$ ni olgan holatda $x(t)$ ni topib olamiz:

$$(t-\lambda)x(t)+t\cdot\alpha_x=y(t),$$

Bundan $x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\alpha_x\frac{t}{t-\lambda}$ $x(t)$ uchun olingan $x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\alpha_x\frac{t}{t-\lambda}$ ifodani $\alpha_x=\int_0^1 sx(s)ds$ ga qo'ysak, α_x uchun $\alpha_x=\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds-\alpha_x\int_0^1\frac{s^2}{s-\lambda}ds$

tenglamaga erishamiz. Bundan esa $\Delta(\lambda)\neq 0$ ekanligidan $\alpha_x=\frac{1}{\Delta\lambda}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds$ hosil bo'ladi. Bundan, $x(t)=\frac{y(t)}{t-\lambda}-\frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1\frac{sy(s)}{s-\lambda}ds$ kelib chiqadi.

Shunday ekan, A ning rezolventasi quyidagi

$$R_\lambda(A)y(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda} - \frac{t}{t-\lambda}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^1 \frac{sy(s)}{s-\lambda}ds, \quad y \in L_2[0;1]$$

formula yordamida aniqlanadi.

Bu olingan natijalardan ko'rinadiki, agar $\lambda \in C \setminus \{[0;1] \cup \{\lambda_0\}\}$ bo'lsa, unda $D\big(R_\lambda(A)\big) = L_2[0;1]$ va $R_\lambda(A)$ chegaralangan, bunda $\lambda_0 \in (0;\infty)$ va $\Delta(\lambda_0) = 0$

b) $\lambda \in [0;1]$ bo'lsin, unda $Im(A-\lambda I) \neq L_2[0;1]$, sababi $y_0(t) \equiv 1$ funksiyani olsak $y_0 \notin Im(A-\lambda I)$. Shunday ekan, $D(R_\lambda(A)) \neq L_2[0;1]$ va shu sabab $\lambda \in \sigma(A)$. Demak, A ning spektri $\sigma(A) = [0;1] \cup \{\lambda_0\}$ to'plamdan iborat, bunda $\lambda_0 \in (0;\infty)$ va $\Delta(\lambda_0) = 0$.

Musbat va unitar operatorlar

Bizga H – Gilbert fazosi va unda aniqlangan $A: H \to H$ o'z-o'ziga qo'shma operator berilgan bo'lsin.

Ta'rif: Agar istalgan $x \in H$ element uchun $(Ax, x) \geq 0$ shart o'rinli bo'lib, hech bo'lmaganda yagona $x_0 \in H$ uchun $(Ax_0, x_0) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'ls, A operatorga musbat operator deyiladi, $A > 0$ ko'rinishida belgilanadi.

Agar $A, B: H \to H$ o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun quyidagi $A - B > 0$ shart bajarilsa, u holda A operatorga B operatordan katta deyildi va $A > B$ ko'rinishida belgilanadi. Agar $A > B$ va $A = B$ bo'lsa, bu $A \geq B$ ko'rinishda yoziladi.

O'z-o'ziga qo'shma operatorlar to'plamida keltirilgan tengsizliklar amalining quyidagi xossalari bor:

1) $A \geq B,\ C \geq D$ bo'lsa, unda $A + C \geq B + D$ o'rinli bo'ladi.
2) $A \geq 0,\ \alpha \geq 0$ bo'lsa, unda $\alpha A \geq 0$ o'rinli bo'ladi.
3) $A \geq B,\ B \geq C$ bo'lsa, unda $A \geq C$ o'rinli bo'ladi.
4) $A > 0$ operator uchun A^{-1}operator mavjud bo'lsa, unda $A^{-1} > 0$ bo'ladi.
5) A, B operatorlar musbat o'rin almashinuvchi va o'z-o'ziga qo'shma bo'lsa, AB operator ham musbat operator bo'ladi.

Lemma: $A, B \in L(H)$ nomanfiy operatorlar va α, β nomanfiy haqiqiy sonlar bo'lsin, unda $\alpha A + \beta B$ operator ham nomanfiy bo'ladi.

Lemma: A operator nomanfiy bo'lsin, unda quyidagi

$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)}$$

Koshi-Bunyakovskiyning umumlashgan tengsizligi o'rinli bo'ladi.

Teorema: O'z-o'ziga qo'shma o'rin almashinuvchi musbat A va B operatorlar ko'paytmasi musbat bo'ladi.

Teorema: Istalgan musbat A operatorning bitta B kvadrat ildizi mavjuddir. Shu bilan birga, B operator A operator bilan o'rin almashinuvchi bo'lgan istalgan C operator bilan ham o'rin almashinuvchi bo'ladi.

Teorema: Ixtiyoriy har qanday chiziqli chegaralangan A uchun AA^* va A^*A lar musbat operatorlardir.

Misol: $A: l_2 \to l_2, \quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\right), x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$ operatorni musbatlikka tekshiring. A operator agar musbat bo'lsa uning kvadratik ildizi topilsin.

Yechish: Avval istalgan $x, y \in l_2$ uchun $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ takrorlab o'tamiz va A ning o'z-o'ziga qo'shma ekanligini ko'rsatib o'tamiz: $(Ax, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\left(\frac{1}{n} y_n\right)} = (x, Ay)$

A ning aniqlanishiga ko'ra $(Ax, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |x_n|^2 \geq 0$

shart istalgan $x \in l_2$ uchun o'rinli. Agar $x_0 = (1,0, \dots, 0, \dots) \in l_2$ deyilsa, unda $(Ax_0, x_0) = 1 > 0$ bo'ladi va ta'rifga ko'ra $A > 0$.

Ana endi $B: l_2 \to l_2, \; Bx = \left(x_1, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}x_n, \dots\right), x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_2$

operatorni ko'ramiz va $B^2 = A$ ekanini ko'rsatamiz. Chindan ham

$B^2 x = B(Bx) = \left(x_1, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}x_n, \dots\right) = \left(x_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}x_n, \dots\right) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\right) = Ax, \; x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$ bo'ladi.

Misol: Quyidagi

$$A: L_2[0;1] \to L_2[0;1], \;\; (Ax)(t) = t\int_0^1 sx(s)ds, \quad x \in L_2[0;1]$$

operatorni musbatlikka tekshiring. A musbat operator bo'lsa uning kvadratik ildizini toping.

Yechish: $x, y \in L_2[0;1]$ ixtiyoriy element bo'lsin, unda $(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}\, dt = \int_0^1 \left(t\int_0^1 (sx)(s)\, ds\right)\overline{y(t)} dt = \int_0^1 \int_0^1 tsx(s)\overline{y(t)} ds dt = \int_0^1 x(t)\overline{\left(t\int_0^1 sx(s)ds\right)}\, dt = (x, Ay)$

Tenglik o'rinli. Ya'ni A o'z-o'ziga qo'shma operator. A operatorni musbatlikka tekshirish uchun italgan $x \in L_2[0;1]$ uchun (Ax, x) ni qaraymiz: $(Ax, x) = \int_0^1 \left(t\int_0^1 sx(s)ds\right)\overline{x(t)}\, dt = \int_0^1 sx(s)ds \overline{\left(\int_0^1 sx(s)ds\right)} = \left|\int_0^1 sx(s)ds\right|^2 \geq 0,$

bunda $x_0(t) \equiv 1$ uchun $(Ax_0, x_0) = \left|\int_0^1 sds\right|^2 = \frac{1}{4} > 0$ Demak, A musbat operator.

Quyidagi $B: L_2[0;1] \to L_2[0;1], \quad (Ax)(t) = kt\int_0^1 sx(s)ds, x \in L_2[0;1]$ ni qaraymiz. Bunda k biror bir o'zgarmas son bo'lsin, $B^2 = A$ va $B \geq 0$ shartlardan topiladi. $(B^2x)(t) = \big(B(Bx)\big)(t) = B\left(kt\int_0^1 sx(s)ds\right) =$

$kt\int_0^1 s\left(ks\int_0^1 s'x(s')ds'\right)ds = \frac{k^2}{3}t\int_0^1 sx(s)ds = t\int_0^1 sx(s)ds = (Ax)(t)$ Bundan esa $k = \sqrt{3}$ bo'lishi kelib chiqadi.

Bizga H Gilbert fazosi berilgan bo'lsin. Agar H Gilbert fazosida aniqlangan V operator ixtiyoriy $f, g \in H$ lar uchun $(Vf, Vg) = (f, g)$ tenglikni qanoatlantirsa, V ga **izometrik operator** deyiladi. Agar bu yerda V operator H ni to'liq H fazoga o'tkazsa, u holda V ga **unitar operator** deyiladi. Shunday qilib, agar V izometrik operator bo'lib, $R(V) = H$ shart bajarilsa, u holda V ga **unitar operator** deyiladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, har qanday unitar operator albatta izometrik operator bo'ladi, teskari tasdiq umuman olganda o'rinli bo'lmasligi mumkin.

Chekli o'lchamli fazoda ta'sir qiluvchi va yadrosi faqat nol elementdan tashkil topgan ixtiyoriy chiziqli operator fazoni to'liq fazoga o'tkazuvchi operator bo'ladi. Shu sababli chekli o'lchamli fazodagi ixtiyoriy izometrik operator unitar operator bo'ladi. Cheksiz o'lchamli fazo holida bu tasdiq umuman olganda o'rinli emas. Bunga ishonch hosil qilish maqsadida quyidagi misolni qaraymiz:

$$V: l_2 \to l_2, \qquad Vx = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots), x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_2$$

operatorni qaraymiz. Ixtiyoriy $x, y \in l_2$ elementlar uchun

$$(Vx, Vy) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n} = (x, y)$$

munosabatlar o'rinlidir. Ta'rifga ko'ra V izometrik operator bo'ladi. V operatorning aniqlanishiga ko'ra

$$R(V) = \{x \in l_2 : x = (x_1, \dots, x_n, \dots), x_1 = 0\}$$

Shu sababli, $R(V) \neq l_2$ munosabat o'rinlidir. Chunki$x_0 = (1,0, \dots ,0, \dots) \in l_2$, lekin $x_0 \notin R(V)$. Demak, V operator unitar operator bo'la olmaydi.

Bizga H gilbert fazosi berilgan bo'lsin. Agar $U: H \to H$ chiziqli operator H ni H ning hamma yeriga normani saqlagan holda akslantirsa, ya'ni ixtiyoriy $x \in H$ uchun

$$||Ux|| = ||x||$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda U ga unitar operator deyiladi.

Misol: $U_s: L_2(T^d) \to L_2(T^d)$, $(U_s f)(x) = e^{i(s,x)}f(x)$, $f \in L_2(T^d)$, $s \in Z^d$ operator unitar. Haqiqatan

$$\|U_s f\|^2 = \int_{T^d} \left|e^{i(s,x)}f(x)\right|^2 = \int_{Z^d} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2$$

Va $D(U_s) = L_2(Z^d)$, $R(U_s) = L_2(Z^d)$ ekani ta'rifga ko'ra U_s unitar bo'ladi.

Misol: $\widehat{U_s} = l_2(Z^d) \to l_2(Z^d)$, $\left(\widehat{U_s}\,\hat{f}\right)(n) = \hat{f}(n+s), \hat{f} \in l_2(Z^d), s \in Z^d$

Operator unitar, haqiqatan

$$\left\|\widehat{U_s}\,\hat{f}\right\|^2 = \sum_{n \in Z^d} \left\|\hat{f}(n+s)\right\|^2 = \sum_{n \in Z^d} \left\|\hat{f}(n)\right\|^2 = \left\|\hat{f}\right\|^2$$

Va $D(\widehat{U_s}) = l_2(Z^d)$, $R(\widehat{U_s}) = l_2(Z^d)$ ekani ta'rifga ko'ra $\widehat{U_s}$ unitar bo'ladi.

Mazkur yo'nalishda olib borilgan ishlar tahlili va olingan natijalar [5-32] maqolalarda keng yoritilgan. Shu blan bir qatorda matematikaning amaliy tadbiqlari to'g'risida misollar keltirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. С.Н.Лакаев, М.Э.Мўминов, Т.М.Ф, 135:3 (2003), 478-503 бет.
2. М.Э.Мўминов, О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке. 2007, 382-383 бет.
3. T.H.Rasulov, D.E.Ismoilova. O'z-o'ziga qo'shma operatorlar. O'quv–metodik qo'llanma. 2021 yil, 172 bet.
4.S.N.Laqayev, Sh.Yu.Holmatov Hilbert fazolarida o'z-o'ziga qo'shma operatorlar. 2012
5. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), 65-76 b.
6. Бозорова Д.Ш., Раупова М.Х. О функции Грина вырождающегося уравнения эллиптического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), c.14-22.
7. Жамолов Б.Ж., Раупова М.Х. О функции Римана вырождающегося уравнения гиперболического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), c.23-30.
8. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
9. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
10. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
11. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
12. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
13. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
14. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
15. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

16. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
17. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
18. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
19. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
20. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).
21. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).
22. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
23. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
24. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
25. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
26. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
27. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
28. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
29. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
30. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.
31. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.
32. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.