HILBERT FAZOLARI. FOK FAZOSI VA UNING QIRQILGAN QISM FAZOLARI

Ashurova Maftuna Ali qizi
Buxoro davlat universiteti
Fizika-matematika fakulteti magistri

Annotatsiya. Ushbu maqolada Hilbert fazosidagi chiziqli operatorlar va Fok fazosi, Fok fazosining qirqilgan qism fazolari haqida ma’lumotlar keltirilgan. Fok fazosi va uning qirqilgan qism fazolari hamda unda skalyar ko’paytma va normalari o’rganilgan va amaliy tadbiqlari bayon qilingan. Mavzuni to’liq yoritish uchun ta’rif, teoremalar keltirilib, bir qator misollar yechib ko’rsatilgan.

Kalit so’zlar: Hilbert fazosi, operatorlar, izomorf fazo, norma, chiziqli operator, chegaralangan operator, normallangan fazo, o’z-o’ziga qo’shma operator, xos qiymat, xos vektor, ortogonal, regulyar qiymat, spektr, rezolventa. Fok fazo, qirqilgan qism fazo.

HILBERT SPACES. A FOCK SPACE AND ITS TRUNCATED SUBSPACES

Ashurova Maftuna Ali qizi
Master Student, Faculty of Physics and Mathematics,
Bukhara State University

Annotation. This article presents information about linear operators in Hilbert space and Fock space, truncated part spaces of Fock space. The Fock space and its truncated part spaces, as well as scalar multiplication and norms in it, are studied and their practical applications are described. Definitions, theorems are given, and a number of examples are shown to fully explain the topic.

Keywords: Hilbert space, operators, isomorphic space, norm, linear operator, bounded operator, normalized space, self-adjoint operator, eigenvalue, eigenvector, orthogonal, regular value, spectrum, resolvent. Fok space, clipped part space.

Mavzuni yoritish uchun zarur bo‘lgan ta'riflar, teoremalarni keltiramiz.

1-ta’rif. Cheksiz o’lchamli to’la Evklid fazosi Hilbert fazosi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy tabiatli f,g,φ, … elementlarning H to’plami Hilbert fazosi bo’lsa, u quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

1. H – Evklid fazosi, ya’ni skalyar ko’paytma kiritilgan chiziqli fazo;
2. $\rho(x,y) = \sqrt{x-y,x-y}$ metrika ma’nosida H- to’la fazo;
3. H fazo - cheksiz o’lchamli, ya’ni unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

Odatda separabel Hilbert fazolari qaraladi, ya'ni H ning hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud [1].

1 - misol. $C_{[a,b]}$ fazo to'la metrik fazo, shuning uchun $C_{[a,b]}$ Hilbert fazo bo'ladi.

2 - misol. R^n fazo to'la metrik fazo, shuning uchun Hilbert fazo bo'ladi.

3 - misol. $m, c_0, c -$ to'la metrik fazo bo'lgani uchun Hilbert fazo bo'ladi.

4 – misol. $C_{2[a,b]} -$ to'la metrik fazo emas, shuning uchun Hilbert fazo bo'lolmaydi.

5 – misol. l_2 , $L_{2[a,b]} -$ to'la metrik fazo bo'lganligi uchun Hilbert fazo bo'ladi.

2 - ta'rif. Agar E va E^* Evklid fazolari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib,

$$x \rightarrow x^*, \qquad y \rightarrow y^*, x, y \in E, \qquad x^*, y^* \in E^*$$

ekanligidan

$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x^*$ va $(x, y) = (x^*, y^*)$

munosabatlar kelib chiqsa, $E\ va\ E^*\ lar\ izomorf\ fazolar\ deyiladi.$

Boshqacha aytganda, Evklid fazolarining izomorfligi shundan iboratki, bu fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lib, bu moslik shu fazolardagi chiziqli amallarni va ulardagi skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Ma'lumki, n – o'lchamli ixtiyoriy 2 ta Evklid fazosi o'zaro izomorfdir. Cheksiz o'lchamli Evklid fazolari o'zaro bo'lmasligi ham mumkin. Masalan $l_2\ va\ C_{2[a,b]}$ fazolar izomorf emas, chunki l_2 to'la metrik fazo, $C_{2[a,b]}$ esa to'la metrik fazo emas [2-3].

Quyidagi teorema o'rinli.

1 – teorema. Ixtiyoriy ikkita separable Hilbert fazosi o'zaro izomorf bo'ladi.

Teoremadan shuni xulosa qilib aytsak bo'ladi: izomorfizm aniqligida faqat l_2 Hilbert fazosi mavjud. Boshqacha qilib aytganda, $l_2\ fazo\ H$ Hilbert fazosining $koordinat\ ko'rinishi$ desak bo'ladi.

H Hilbert fazosining qism fazosi deganda yopiq qism fazoni tushunamiz. Hilbert fazosining qism fazolariga misollar keltiramiz.

6 – misol. $h \in H -$ ixtiyoriy element bo'lsin. h ga orthogonal bo'lgan barcha $f \in H$ elementlar to'plami qism fazoni tashkil qiladi.

7 – misol. l_2 fazoda $x_1 = x_2$ shartni qanoatlantiruvchi elementlar to'plami qism fazoni tashkil qiladi.

8–misol. $\boldsymbol{c_0}$ fazoning $N = \{x \in c_0 \colon x = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, \ldots, x_{2n+2}, 0, \ldots)\}$ to'plami ham qism fazosi bo'ladi.

Hilbert fazosining har qanday qism fazosi yo chekli o'lchamli Evklid fazosi bo'ladi, yo uning o'zi Hilbert fazosini tashkil qiladi.

9 – misol. $L_{2[-2,2]}$ Hilbert fazosida toq funksiyalardan iborat $L_2^-[-2,2] = \{f \in L_2[-2,2] \colon f(-t) = -f(t)\}$ to'plam qism fazo tashkil qiladi.

Agar H Hilbert fazosi separable bo'lsa, uning ixtiyoriy qismi ham separable bo'ladi. Bu quyidagi lemmadan kelib chiqadi.

1 – lemma. E separabel Evklid fazosining har qanday E' qismi yana separabeldir.

Hilbert fazosining qism fazolari ixtiyoriy normalangan fazosining qism fazolari bo'ladi.

Bu xossa Hilbert fazosida kiritilgan skalyar ko'paytma va unga mos ortogonallik tushunchasiga asosan kiritilgan.

2 – teorema. H separable Hilbert fazosining ixtiyoriy M qism fazosida shunday $\{\emptyset_n\}$ ortonormal sistema mavjudki, uning chiziqli qobig'ining yopig'i M ga teng.

Bizga H Hilbert fazosining M qism fazosi berilgan bo'lsin. Barcha $f \in M$ elementlarga orthogonal bo'lgan $g \in H$ elementlar to'plamini $M^{\perp} = H \oplus M$ orqali belgilaymiz, ya'ni $M^{\perp} = \{g \in H: (f, g) = 0,\ \forall f \in M\}$. $M^{\perp}$ qism fazo M qism fazoning $ortogonal\ to'ldiruvchisi$ deyiladi [4-15].

Bizga H Hilbert fazosi va uning $M_1\ va\ M_2$ qism fazolari berilgan bo'lsin.

3 – ta'rif. Agar barcha $f_1 \in M_1\ va\ f_2 \in M_2$ lar uchun $(f_1, f_2) = 0$ bo'lsa, u holda $M_1\ va\ M_2$ qism fazolar ortogonal qism fazolari deyiladi.

3 – teorema. Agar $M - H$ Hilbert fazosining yopiq fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $f \in H$ element yagona usul bilan $f = h + h'$ yig'indiga yoyiladi, bu yerda $h \in M, h' \in M^{\perp}$.

1 – natija. $M \Subset H$ qism fazoning orthogonal to'ldiruvchisining orthogonal to'ldiruvchisi M ning o'ziga teng, ya'ni $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Shunday qilib, H fazoning o'zaro to'ldiruvchi qism fazolari haqida fikr yuritish mumkin. Agar $M\ va\ M^{\perp}$ ikkita shunday bir- birini to'ldiruvchi qism fazolar va $\{\phi_n\}$ va $\{\phi_n'\}$ sistemalarning birlashmasi butun H fazoda to'la orotnormal sistema bo'ladi.

2 – natija. H fazodagi har qanday ortonormal sistemani to'la sistemagacha to'ldirish mumkin.

Agar $\{\phi_n\}$ sistema chekli bo'lsa, u holda bu sistemaga kiruvchi elementlar soni $\{\phi_n\}$ sistemasidan hosil qilingan M ning fazosining o'lchamiga va $M^{\perp}$ qism fazoning koo'lchamiga teng. Bu xulosalardan quyidagicha natijani olamiz.

3 – natija. n o'lchamli qism fazoning orthogonal to'ldiruvchisi n koo'lchamga ega va aksincha.

4 – natija. Bizga H Hilbert fazosi va uning o'zaro ortogonal $M_1\ va\ M_2$ qism fazolari berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $f \in H$ element

$$f = h_1 + h_2\ , \qquad h_1 \in M_1, \qquad h_2 \in M_2$$

ko'rinishida tasvirlansa, u holda H fazo o'zaro orthogonal $M_1\ va\ M_2$ qism fazolarining to'g'ri yig'indisiga yoyiladi deyiladi va

$$H = M_1 \oplus M_2$$

ko'rinishda yoziladi.

To'g'ri yig'indini chekli yoki sanoqli sondagi qism fazolar uchun umumlashtiramiz [15-30].

Quyidagi shartlar bajarilsin: H o'zining $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ qism fazolarining to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi:

a) M_i qism fazolar juft – jufti bilan o'zaro orthogonal, ya'ni M_i dagi ixtiyoriy vector M_k dagi barcha vektorlarga orthogonal, $i \neq k$;

b) $\forall f \in H$ element

$$f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \qquad h_n \in M_n, \quad n = 1, 2, \quad \dots$$

ko'rinishida tasvirlanadi, agar qo'shiluvchilar soni cheksiz bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda $H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus M_n$ ko'rinishida yoziladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki, agar f uchun $f = h_1 + h_2 + \dots + h_n + \dots, \quad h_n \in M_n, \quad n = 1, 2, \dots$ yoyilma mavjud bo'lsa, u yagona va quyidagi tenglik o'rinli:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2.$$

Qism fazolarning to'g'ri yig'indisi bilan bir qatorda chekli yoki sanoqli sondagi Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi haqida ham gapirish mumkin. Agar $H_1 \ va \ H_2$ lar ixtiyoriy Hilbert fazolari bo'lsa, u holda ularning to'g'ri yig'indisi $H = H_1 \oplus H_2$ quyidagicha aniqlanadi. H fazoning elementlari barcha $((h_1, h_2), \quad h_1 \in H_{1,} \ h_2 \in H_2$ juftliklardan iborat. $H = H_1 \oplus H_2$ fazoda qo'shish, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytma amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$(h_1, h_2) + (h_1', h_2') = (h_1 + h_1', \quad h_2 + h_2'), \qquad h_1, h_1' \in H_1, \ \ h_2, h_2' \in H_2,$$

$$\alpha (h_1, h_2) = (\alpha h_1, \alpha h_2), \ \ h_1 \in H_1, \qquad h_2 \in H_2, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$\big((h_1, h_2), (h_{1,}' \ h_2')\big) = (h_1, h_1')_{H_1} + (h_2, h_2')_{H_2}, h_1, h_1' \in H_1, h_2, h_2' \in H_2,$$

Chekli sondagi $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indisi

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n$$

quyidagicha aniqlanadi.

$$H = \left\{ h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots), \ \ h_n \in H_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty \right\}.$$

H fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$(h, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n, g_n), \qquad h = (h_1, h_2, \dots, h_n, \dots),$$

$$g = (g_1, g_2, \ldots \ g_n, \ldots), \qquad h_n, g_n \in H_n$$

10 – misol. $L_2^-[-2,2]$ funksiyalar to'plami qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisini toping.

Fok fazosi va uning qirqilgan qism fazolari.

Fok fazosi va uning qism fazolarida skalyar ko'paytma va norma

$\mathbb{C}$ – bir o'lchamli kompleks sonlar fazosi bo'lsin. Ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun $L_2[a,b]^n$ orqali $[a,b]^n$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosi belgilaymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$H_0 := \mathbb{C}, H_n := L_2([a,b]^n), \qquad n \in N;\ H^{(m)} := \oplus_{n=0}^{m-1} H_n, \quad H := \oplus_{n=0}^{\infty} H_n.$$

4- ta'rif. H Hilbert fazoga Fok fazosi deyiladi, $H^{(m)}$ Hilbert fazosiga esa Fok fazosining qirqilgan m – zarrachali qism fazosi deyiladi.

Shunday qilib,

$$H^{(1)} := H_0 \oplus H_1 = \{(f_0, f_1): f_k \in H_k, \qquad k = 0, 1\};$$

$$H^{(2)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$$
$$= \{(f_0, f_1, f_2): f_k \in H_k, k = 0, 1, 2\}; \quad H^{(3)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 = \{(f_0, f_1, f_2, f_3): f_k \in H_k, k = 0, 1, 2, 3\};$$

....

$$H^{(m)} := H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_{m-1} = \{(f_0, f_1, \ldots f_m): f_k \in H_k, k = \overline{0, m}\}$$

Odatda, $L_2[a,b]$ fazo yordamida qurilgan Fok fazosi $F(L_2[a,b])$ kabi belgilanadi.

$m \in N$ – fiksirlangan natural son bo'lsin. Ixtiyoriy ikkita $f = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in H^{(m)}$ va $g = (g_0, g_1, \ldots, g_m) \in H^{(m)}$ vektor – funksiyalar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(f, g) = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + \ldots + (f_m, g_m)_m$$

Kabi aniqlanadi, bu yerda

$$(f_0, g_0)_0 = f_0 \cdot \overline{g_0}; \quad (f_k, g_k)_k = \int_a^b f_k(t) \cdot \overline{g_k(t)}\, dt, k = \overline{1, m}.$$

Xuddi shuningdek, $f = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in H^{(m)}$ vektor – funksiyalarning normasi

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{m} \|f_k\|_k^2}$$

Tenglik yordamida aniqlanadi, bunda

$$\|f_0\|_0 := |f_0|$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f_k(t)|^2\,dt}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Endi H Fok fazosida skalyar ko'paytma va normani aniqlaymiz.

Ixtiyoriy 2 ta F va G funksiyalarni qaraymiz.

Bunda $F = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in H$ va $G = (g_0, g_1, \ldots, g_m) \in H$ elementlar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(F, G) := \sum_{k=0}^{\infty} (f_k, g_k)_k$$

kabi, F vector – funksiya normasi esa

$$\|F\| := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_k^2}$$

kabi aniqlanadi.

Ko'rinib turibdiki, H_0 - bir o'lchamli chiziqli fazo, $\forall n \in N$ natural soni uchun H_n cheksiz o'lchamli chiziqli fazo bo'ladi. Demak, $H^{(m)}$ va H chiziqli fazolar cheksiz o'lchamlidir. Masalan, $\forall n \in N$ natural soni uchun

$$f^{(1)} := (0, t, 0, \ldots,) \in H^{(m)};$$
$$f^{(2)} := (0, t^2, 0, \ldots, 0) \in H^{(m)};$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)} := (0, t^n, 0, \ldots, 0) \in H^{(m)}.$$

Elementlar chiziqli bog'lanmagan. Haqiqatdan ham, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlari uchun $\alpha_1 f^{(1)} + \alpha_2 f^{(2)} + \ldots + \alpha_n f^{(n)} = \Theta$ tenglikni qaraymiz. Mazkur tenglik

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = 0, \qquad \forall t \in [a, b]$$

tenglikka ekvivalentdir. Oxirgi tenglik ixtiyoriy $t \in [a, b]$ da o'rinli bo'lishi uchun

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu esa o'z navbatida $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$ elementlarning chiziqli bog'lanmagan ekanligini bildiramiz. Demak, $\dim H^{(m)} = \infty$ ekan.

Endi bozonli Fok fazo tushunchasini kiritamiz. $\forall n \in N$ natural soni uchun $L_2^{sym}([-a, a]^n)$ orqali $[-a, a]^n$ da aniqlangan, istalgan ikkita argument bo'yicha simmetrik bo'lgan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

5 – ta'rif. Ushbu

$$F_b\left(L_2^{sym}([-a, a]^n)\right) := C \oplus L_2[-a, a] \oplus L_2^{sym}([-a, a]^2) \oplus L_2^{sym}([-a, a]^3) \ldots$$

Hilbert fazosiga bozonli Fok fazo deyiladi.

Fok fazosining qirqilgan qism fazolaridagi elementlarning skalyar ko'paytmasini va normasini hisoblashga doir misollar keltiramiz.

11 – misol. m =2 bo'lsin.

$$f = (2, cost) \in \mathbb{C} \oplus L_2[-\pi; \pi],$$
$$g = (3i, sint) \in \mathbb{C} \oplus L_{2+}[-\pi; \pi].$$

Elementlarning skalyar ko'paytmasini va normasini toping.

Yechish. f va g larning skalyar ko'paytmasini va normasini ta'rif bo'yicha hisoblaymiz: $\mathbb{C}$ fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi: $(x, y) = x \cdot \bar{y}$

L_2 fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt,$$

$$(f, g) = 2 \cdot \overline{3i} + \int_{-\pi}^{\pi} cost \cdot sint\, dt = -6i.$$

Endi normasini hisoblaymiz. L_2 fazoda norma quyidagicha kiritiladi:

$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt};$

$$\|f\| = \sqrt{|2|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 t\, dt};$$

$$\|f\|^2 = 4 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + cos2t)\, dt = 4 + \pi;$$

$$\|g\|^2 = |3i|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 t\, dt = 9 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - cos2t)\, dt = 9 + \pi;$$

12 – misol. m= 3 bo'lsin.

$$f = (1, cost_1, sint_1 + sint_2) \in \mathbb{C} \oplus L_2[-\pi; \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2);$$
$$g = (2 - i, sint_1, sint_1 - sint_2) \in \mathbb{C} \oplus L_2[-\pi; \pi] \oplus L_2([-\pi, \pi]^2);$$

elementlarning skalyar ko'paytmasini va normasini toping.

Yechish. Skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra:

$(f, g) = 1 \cdot \overline{(2 - i)} + \int_{-\pi}^{\pi} cost_1 \cdot sint_1\, dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(sint_1 + sint_2) \cdot (sint_1 - sint_2)\, dt_1 dt_2 =$

$$2 + i + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sin2t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(sin^2 t_1 - sin^2 t_2)\, dt_1 dt_2 = 2 + i;$$

Endi normani hisoblash formulasidan foydalanib, f va g elementlarning normasini topamiz:

$\|f\| = \sqrt{1^2 + \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(sint_1 + sint_2)^2 dt_1 dt_2} = \sqrt{1 + \pi + 4\pi^2};$

$$\|f\|^2 = 1 + \pi + 4\pi^2.$$

$$\|g\| = \sqrt{|2-i|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 t_1 dt_1 + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(sint_1 - \ sint_2)^2 dt_1 dt_2} \ = \sqrt{5+\pi+4\pi^2}.$$

$$\|g\|^2 = \ 5+\pi+4\pi^2.$$

Zamonaviy matematik fizikada A_{01} operatorga yo'qotish operatori deyiladi, ${A_{01}}^*$ operatorga esa paydo qilish operatori deyiladi. Бу операторлар [28-33] илмий изланишларда кенг қўлланилган. Шу ўринда айтиш жоизки, A operatorli matritsa panjaradagi soni saqlanmaydigan va soni ikkitadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos keluvchi Gamiltonianni ifodalaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Rasulov T.H., Ismoilova D.E. O'z-o'ziga qo'shma operatorlar o'quv metodik qo'llanma, 2021-yil

2. Abdullayev J.I., Lakayev S.N. On the Spectral Propert Расулов of the Matrix-Valued Friedrichs Model. Manyparticles Hamiltonians, spectrum and scattering.//Advances in soviet Mathematics. American Mathematical Society. 1191. 5.pp.1-37

3. Лакаев С.Н., Латипов Ш.М. Числа связанных состояний двуканальной молекулярной-резонансной модели, УзМЖ 2011, № 3 СТР 98-113.

4. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

5. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

6. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

7. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. On a problem for a quasi-linear elliptic equation with two perpendicular lines of degeneracy // Proceedings of International Educators Conference, Conference Proceedings, Volume 3, December, 2022, pp. 352-354.

8. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

9. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

10. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

11. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

15. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

16. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

17. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

18. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

19. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

20. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

21. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

22. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

23. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

24. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

25. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

26. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

27. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

28. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

29. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

30. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

31. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

32. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

33. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).