# KASR TARTIBLI INTEGRAL HAQIDA QISQACHA MA'LUMOTLAR

***Shukurova Mubashira Furqatovna***
*Buxoro davlat universiteti magistri*

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada kasr tartibli integrallar va ularning kelib chiqishiga asos bo'lgan masalalar va rivojlanish tarixi haqida qisqacha ma'lumotlar keltirilgan. Kasr tartibli integrallarga asos solgan olimlar va integrallanuvchi funksiyalar sinfi haqida ba'zi bir ma'lumotlar yoritilgan.

**Kalit so'zlar:** kasr tartibli integrallar, matematik analiz, Riman integrali, grafiklar, kasr integro - differensial hisob, tolali polimerlar, deformatsiya.

# BRIEF INFORMATION ON FRACTIONAL INTEGRAL

Shukurova Mubashira Furqatovna
Master of Bukhara State University

**Annotation**. This article provides a brief overview of fractional integrals and their derivation and development history. Scientists who founded fractional integrals and some information about the class of integrable functions are covered.

**Key words:** fractional integrals, mathematical analysis, Riemann integral, graphs, fractional integro-differential calculus, fibrous polymers, deformation.

Eng avvalo kasr tartibli integralning ta'rifini keltiramiz va so'ngra uning kelib chiqishi to'g'risidagi ma'lumotlarni bayon qilamiz.

Kasr tartibli integralining ta'rifi eng keng tarqalgan va ko'pchilik ilovalarda qo'llaniladigan- Riman-Liuvil ta'rifidir. Kasr tartibli hosilalar holi Riman-Liuvil, Kaputo va Grunvald-Letnikovlarning ta'riflari xuddi shunday pozitsiyani egallaydi. Quyida biz chap qo'l (chap tomon) operatorlari uchun ushbu ta'riflarning qat'iy formulalarini keltiramiz.

Ta'rif. $f(x)\epsilon L^1(a,b), a,b\epsilon R^1$ funksiyaning ixtiyoriy butun bo'lmagan $\alpha > 0$ tartibli Riman-Liuvil

$$ {}_{a}I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} $$

kasr integrali ifoda bilan aniqlanadi.

Kasr tartibli integrallar yordamida matematik analiz qilish uch asrdan ko'proq tarixga egadir. Butun XIX asr va XX asrning birinchi yarmi matematik analizning mustaqil bo'limi sifatida natijalarni to'plash va kasr hisobini shakllantirish davriga aylangan. Bunda matematiklar va fiziklarning ilmiy ishlarining nashrlari paydo bo'lgan. Ular, Laplas, Furye, Riemann, Abel, Lyuvil, Grunvald, Xivisayd, Kuryant va boshqalarning ilmiy asarlaridir. Mashhur rus matematik olimi A.V. Letnikov kasr tartibli matematik analizining rivojlantirishga katta hissa qo'shgan. 1868-1872-yillarda A.V. Letnikovning kasr tartibli hisoblash bo'yicha birinchi ilmiy maqolalari chiqqan.

Olimlarning kasr tartibli hisoblashga bo'lgan qiziqishlarining yangi to'lqini 1974-

yilda «Kasr tartibli hisoblash» (K.B. Oldham, J. Spanier) kitobi nashr etilgandan so'ng paydo bo'lgan. Ushbu kitobda kasr tartibli hisoblash nazariyasi tizimli ravishda keltirilgan. Shu vaqtdan boshlab turli xil jurnallarning tematik sohalari paydo bo'la boshlagan, ular ilm-fan, texnika, tabiatshunoslikning turli sohalarida kasr tartibli hisoblashni qo'llashga bag'ishlangan.

Hozirgi vaqtda kasr tartibli hisoblash nazariy jihatdan ham, amaliy jihatida ham tez rivojlanish bosqichidadir. Matematik analizning bu bo'limi har xil (an'anaviy va fraktal) muhitdagi murakkab dinamik jarayonlarni matematik modellashtirish vositasiga aylangan, bu analiz, sintez, diagnostika va yangi boshqaruv tizimlarini yaratishning turli muammolarini hal qilishga imkon yaratib beradi.

Riman integrali-muayan integralning eng keng qo'llanuvchi turi hisoblanadi. Ko'pincha «muayan integral» atamasi ostida aynan Riman integral tushuniladi hamda matematik analizning barcha kurslarida eng birinchi bo'lib o'rganiluvchi integraldir. U Bernhard Riman tomonidan 1854-yilda ishlab chiqarilgan va integral tuzilishining birinchi bosqichidan biridir.

Riman integralining geometrik ma'nosi haqida qisqacha ma'lumotlar keltiramiz.

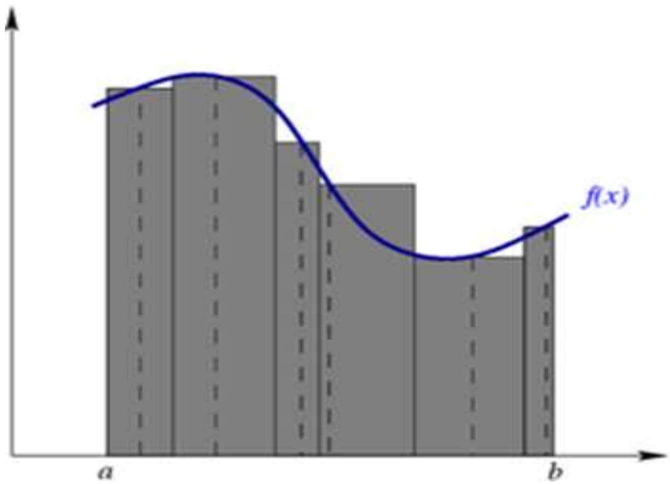
Bernhard Riman 1854-yilda integralning ta'rifni funksiyaning uzluksizlikni faraz qilmay bayon qilgan (1868-yilda, rus tilida esa 1914-yilda nashr etilgan).

Aytish joizki, Riman nazariyasining zamonaviy ko'rinishini Darbu berilgan (1879-y.).

Riman integrali grafik ostidagi yuza o'lchamini beradi. Ustidagi yuza izlanayotgan kesmani kesmalarning yakuniy soniga bo'laklaymiz. Har bir kesmachada grafikning bir nuqtasini belgilaymiz va grafikning o'sha nuqtasigacha asos sifatida kesmacha bilan vertikal to'g'riburchak yasaymiz. Bundagi to'g'ri to'rtburchaklardan hosil bo'lgan figurani ko'rib chiqamiz. Bunday figurani S yuzasi $(\Delta x_i)$ uzunlikdagi kesmalarga aniq ajratishda

$$\sigma = \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

yig'indi bilan beriladi:




Bu kesmalar uzunligini kamaytirilishi bilan bunday figura yuzasi grafik ostidagi yuzaga yaqinlashadi.

Agar funksiya $f(x)$ $[a,b]$ oraliqda integrallangan bo'lsa, u holda $|f(x)|$ va $kf(x)$ (bunda $k = const$) funksiyalarning ham shu oraliqda integrali oson topiladi.

Agar 2 ta funksiya $f(x)$ va $g(x\ )$ $[a,b]$ oraliqda integralluvchi bo'lsa, u holda ularning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi ham integrallangan bo'ladi.

Endi funksiyaning kasr tartibli integral va hosilalari uchun zarur bo'ladigan sinflarni ta'rif va xossalarini keltiramiz.

$\Omega = [a, b\,]$ da $-\infty \le a \le b \le \infty$. $\Omega -$ chegaralangan kesma, yarim o'q yoki butun o'q. Agar yarim va butun o'qlar bo'lsa, $\mathrm{R}^1 = [-\infty, \infty), \mathrm{R}^1_+ = [0, \infty)$ va $\mathrm{R}^1$ bilan bitta cheksiz to'g'ri chiziqni belgilaymiz.

Gyolderning sinflarini chegaralangan kesmada ko'ramiz.

$\Omega$ da aniqlangan $f(x)$ funksiya $\Omega$ sohasida

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le A|x_1 - x_2|^{\lambda}$$

shartni qanoatlantirsa, bu funksiyalar Gyolderning sinfiga tegishli deyiladi. $x_1, x_2 \in \Omega$, A doimiy va λ - Gyolder ko'rsatkichi deyiladi.

Kasr integro - differensial hisobi (keyingi o'rinlarda - kasr hisobi, ID) 1695-yilda G. Lopital va G. Leybnits o'rtasida hosila ma'nosi haqidagi savolni muhokama qilishdan kelib chiqqan bo'lib, uch yuz yildan ortiq vaqt davomida rivojlanib kelmoqda. Integro - differensial hisobni qurishdagi birinchi qadamni 1738-yilda L. Eyler qo'ygan, u darajali funksiyasining $p$ tartibli hosilasini hisoblash natijasiga butun bo'lmagan son uchun ma'no berish mumkinligini payqagan, deb ishoniladi.

$\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ ning butun bo'lmagan (kasr) qiymatlariga differentsial tushunchasini umumlashtirish g'oyasi integral hisob-kitobdan oldin paydo bo'lgan. Tarixda bunday g'oyani muhokama qilishga birinchi urinishi G. Leybnitsning yozma ishlarida mavjud. G.Leybnitsning ikkita funksiyani o'zgarishini hisoblash, y'ani differensiallash haqidagi teoremaga oid xatlaridan birida J. Bernuli ushbu teorema differensiallashning butun bo'lmagan (kasr) tartibida bo'lganida teoremaning ahamiyati haqida so'ragan.

Bundan tashqari, G. Leybnits G. Lopitalga (1695) va Uollisga (1697) maktublarida, 1/2 tartibli differensiallar va hosilalarni ko'rib chiqish imkoniyati to'g'risida bir necha bor izoh bergan.

Birinchi qadam L. Eyler tomonidan amalga oshirilgan deyish mumkin. O'z o'rnida darajali funksiyasining $\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right)$ kasr tartibli differensialini hisoblash natijasi Laplasning butun bo'lmagan soniga ma'no berish mumkinligi haqida fikrlar bayon qilganligini unutmaslik lozim.

S. Lakroix

$$\int T(t) t^{-x} dt$$

bilan ifodalangan funksiyalarning butun bo'lmagan sonini differensiallash imkoniyatini taklif qilgan $\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}}$ ni darajali funksiyasidan olishning aniq formulasi takrorlangan

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\mu}} = f(x), \qquad x > a, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Keyingi bosqichda

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \times \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(tx - t\lambda + \frac{p\pi}{2}\right) dt$$

tenglikni qo'llashni taklif etgan.

Yuqorida qayd qilingan ma'lumotlarni kasrl tartibli integral tenglama bilan bog'liq holda N. Abelning ilmiy asarlarida uchratish mumkin:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\mu} = f(x), \qquad x > a, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Bu yo'nalishdagi tadqiqotlarni P. Laplas, S. Lakrua va J. Furye ham olib borgan bo'lib, ular 1822 yilda ixtiyoriy, lekin yetarlicha silliq $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy musbat butun bo'lmagan $p$ tartibli kasr hosilasining birinchi ta'rifini taklif qilganlar. $f(x)$ quyidagi integral tenglikka asoslanadi:

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^p d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left(tx - t\gamma + \frac{p\pi}{2}\right) dt,$$

bu yerda $t$ va $\gamma$ - integral o'zgaruvchilari.

XX asrning birinchi yarmida, taxminan 1920-yillardan boshlab, tadqiqotlar nafaqat fundamental matematik xususiyatga ega, balki ID apparatidan foydalanish asosida fizik tizimlarni modellashtirish va ularning xususiyatlarini tushuntirish bilan bog'liq tadqiqotlar ham rivojlana boshladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, bunday tadqiqotlarga birinchi urinishlar J. Liuvil va N. Abel tomonidan integral va kasr tartibli hosilalari bo'lgan tavtoxron muammosi va integral tenglamalar yoki munosabatlar paydo bo'ladigan boshqa klassik muammolarni hal qilishda foydalanilgan. XIX asr oxiri - XX asr boshlarida O. Xevisayd elektr zanjirlarining hisob-kitoblarini amalga oshirish imkonini beradigan operativ hisob-kitobni qurdi.

O. Xevisayd va T. Bromvich yarim cheksiz rezistiv sig'imli chiziq kabi taqsimlangan tizimlar uchun uzatish funksiyasi (impedans) 72 tartibli hosila bo'lgan integro-differensial operator bilan ifodalanishini ko'rsatdi.

XX asrning 30-40-yillarida A. Gemant, A.N. Gerasimov, G.V. Skott-Bler va Y.N. Rabotnov elastik materiallarning xossalarini keng qamrovli tadqiqotlar o'tkazdi, uning davomida tolali polimerlarda kuchlanish fraksiyonel quvvat funksiyasi va deformatsiyaning konvolyutsiyasi yoki deformatsiyaning hosilasi sifatida ifodalanishi ham ko'rsatildi. Bunday holda, quvvat funksiyasidagi kasr ko'rsatkichi bunday materiallarning haqiqiy fizik xususiyatlariga bog'liq.

XX asr o'rtalarida F.Maynardi va M.Kaputolar termoelastiklik masalalarida modellar qurish uchun kasr tartibli differensial tenglamalardan foydalanish fizik mulohazalardan ko'ra, ko'proq adekvat ekanligini va hisob-kitoblarda eksperimental kuzatilgan ma'lumotlarni aniqroq takrorlash imkonini berishini ko'rsatdi.

Keyingi umumlashtirishlar Y.N. Rabotnov va R. Bagley va P. Torvik elastik materiallarning deformatsiyasi paytida gisterezis ta'sirini kuzatish va bu materiallarning turli dinamik yuklanish sharoitida turli xil xatti-harakatlariga oid bir qator eksperimental ma'lumotlarni tushuntirishga imkon berdi. Hozirgi vaqtda ID dan foydalanishga asoslangan elastik muhitning hatti-harakatlarining bir qator murakkab va chuqur ishlab chiqilgan modellari mavjud bo'lib, ular uchun faqat butun sonli tartibni ishlatadigan modellarga nisbatan eksperiment va jismoniy ma'no bilan aniqroq muvofiqlik namoyish etilgan.

Boshqaruvchi tenglamalarda nafaqat ba'zi funksiyalar va ularning hosilalari, balki ularning integral konvolyutsiyalari (bundan tashqari, kasr quvvat yadrosi bilan) ko'rinishida ifodalangan. Shunga o'xshash jismoniy omillar ham g'ovakli, donador, quvurli, tolali va boshqa bir hil bo'lmagan murakkab tuzilmali muhitlar va ulardagi uzatish jarayonlari ham bunga misol bo'ladi.

XX asr o'rtalarida dielektriklarda bo'shashish va elektron-kimyoviy muhitning hatti-harakatlariga oid nashrlar paydo bo'ldi. Kondensatorlar va elektro-kimyoviy elementlarni zaryadlash va zaryadsizlantirish jarayonlarida xotira hodisasi mavjudligini ko'rsatadigan tajribalar o'tkazildi. Ushbu tajribalar uchun kasr tartibidagi differensial tenglamalarga asoslangan modellar tuzildi va butun tartibli tenglamalarga asoslangan modellarga nisbatan simulyatsiya natijalarining yaxshiroq mosligi ko'rsatildi.

Keyinchalik, ID yarimo'tkazgichlar fizikasi, plazma fizikasi, astrofizika va boshqalarda turli jarayonlar (tartibsiz muhitda o'ta past bo'shashish, tashish va to'lqin jarayonlari) modellarini qurish uchun muvaffaqiyatli qo'llanildi.

XX asrning ikkinchi yarmida tadqiqotchilar tizimlar va signallar nazariyasida ID dan foydalanish imkoniyatiga e'tibor qaratdilar. Shu munosabat bilan o'zgarishlar hisobini «kasrli» umumlashtirish va kasrli differensial qo'shimchalar nazariyasi, shuningdek klassik integral o'zgarishlarni (Furye, Laplas, Gilbert va boshqalar) kasrli umumlashtirish bo'yicha ishlar rivojlana boshladi. 1974-yilda kasr hisobiga oid birinchi monografiya nashr etildi. O'sha yili B. Ross Nyu-Xeyven universitetida ID muammolari va uning qo'llanilishiga bag'ishlangan 1-xalqaro konferensiyani tashkil qildi (Fractional Calculus and It Applications).

XX va XXI asrlar oxirida ID ning vektor umumlashtirishi ishlab chiqilgan. DI nuqtayi-nazaridan tavsifi ko'proq mos keladigan haqiqiy tizimlar sonining sezilarli o'sishi munosabati bilan ushbu tizimlar uchun samarali usullar va boshqaruv asboblarini ishlab chiqish zarurati juda dolzarb bo'lib qoldi.

So'nggi yillarda kasr-tartibli kontrollerlarni loyihalashga bag'ishlangan yo'nalish faol rivojlanmoqda. Bunday qurilmalar an'anaviy proportsional-integral hosilaviy kontrollerlarga (PID-kontrollerlar) qaraganda ko'proq sozlanish parametrlariga ega, bu integratsiya va differentsial aloqalar ko'rsatkichlarini o'zgartirish imkoniyati tufayli va boshqaruv tizimlari vazifalarida ham yuqori samaradorlik va moslashuvchanlikni butun va kasr tartiblarini namoyish etdi.

Hozirgi vaqtda jadal ilmiy-texnika taraqqiyoti ta'sirida ID kuchli ilmiy yo'nalishga aylandi, jumladan fundamental va amaliy tadqiqotlar bu zamonaviy tadqiqotchilarning qiziqish ob'ektiga aylangan fizik tizimlar va jarayonlarni aniqroq tavsiflash zarurati bilan bog'liq. Bunday tizim va jarayonlarning o'ziga xos xususiyatlari ularning nolokal tabiati va xotira hodisasidir. Masalan, bu mikrostruktura va nanostrukturali muhitlarga, bundan tashqari tabiat va texnologiyadagi deterministik va xaotik (shu jumladan, «fraktal-xaotik») jarayonlarga tegishli.

ID muammolari va uning fan va texnikaning turli sohalarida qo'llanilishi bo'yicha nashrlarning boy bibliografiyasi ID masalalarining sezilarli darajada ishlab chiqilganligidan dalolat beradi. ID rivojlanishiga ham uni qo'llashning turli jihatlariga ham bag'ishlangan ko'plab monografiyalar va mavzuli maqolalar to'plamlari mavjud.

Ilmiy nashrlarning taniqli ma'lumotlar bazalarida (Science Direct, E-Library, Scopus, IOP Publishing, SpringerLink va boshqalar) «kasr hisobi», «kasr operatorlari», «kasr tenglamalari» kalit so'zlari bo'yicha qidiruv so'rovlari 100 mingdan ortiq natijani beradi. Fraksiyonel analiz konferentsiyalari muntazam ravishda o'tkaziladi, shu jumladan Avtomatik boshqaruv bo'yicha Xalqaro Kongress (IFAC) bilan birgalikda «Fraktsion farqlash va uning qo'llanilishi» (FDA) konferentsiyasi bunga misol bo'ladi.

Dunyoda ID g'oyalarini rivojlantirayotgan olimlar F. Maynardi, I. Podlubniy, Y.Q. Chen (Y.Q. Chen), A.M. Naxusheva, A.A. Kilbasa, R.Sh. Nigmatullina va boshqalar nomlari bilan bog'liq bo'lgan bir qancha asosiy ilmiy maktablar mavjud. ID muammolari va uning qo'llanilishi bo'yicha to'rtta ixtisoslashgan jurnal nashr etilgan: «Fraktsion hisoblash va amaliy analiz» (1998-yildan Bolgariya Fanlar Akademiyasi Matematika va Informatika instituti tomonidan nashr etiladi), «Jurnal Fractional Calculus» (1992-yildan beri Descartes Press Co. tomonidan nashr etilgan), «Fractional Differential Equations» (2010-yildan beri Element D.O.O tomonidan nashr etilgan), «Kasrli hisob-kitoblarda aloqalar» (2010-yildan Publisher Academic tomonidan nashr etilgan).

Ushbu asarlarda asosiy e'tibor kasr tartibli integrallar va kasr tartibli differensiallash operatsiyalarining adekvat talqinini izlashga bag'ishlangan ishlarga va fraksional dinamik tizimlarni modellashtirish va ularni boshqarish muammolarida ID dan foydalanishga bag'ishlangan ishlarga qaratilgan.

Kasr amallarini talqin qilishda (geometrik, fizik, ehtimollik-statistik) turli yondashuvlar ham ko'rib chiqiladi. Kasr tartibli dinamikaning real ko'rinishlari, real tizimlarni tavsiflashda kasr tartibli operatorlardan foydalanishning fizik ma'nosi va fizik oqibatlari ham qisqacha ko'rib chiqiladi.

Aytish joizki, kasr tartibli integrallarni o'rganishda Gyolder sinflari muhim rol o'ynaydi. Ushbuni inobatga olib $\mathrm{H}_0^{\lambda}(\mathrm{p})$ va $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\mathrm{p})$ sinflar haqida tushunchalarni taqdim etamiz

$\mathrm{H}^{\lambda}$ va $\mathrm{H}^{\lambda}(\mathrm{p})$ sinflar. $\Omega = [a, b\,]$ bo'lsin, bu erda $-\infty \le a \le b \le \infty$. $\Omega$ chegaralangan kesma, yarim o'q yoki butun o'q bo'lishi mumkin. Agar yarim va butun o'qlar bo'lsa, odatdagidek, biz $\mathrm{R}^1 = [-\infty, \infty), \mathrm{R}_+^1 = [0, \infty)$ va $\mathrm{R}^1$ bilan bitta cheksiz to'g'ri chiziqni belgilaymiz. Gyolderning sinflarini chegaralangan kesmada qaraymaiz.

$\Omega$ da aniqlangan $f(x)$ funksiya $\Omega$ sohasida

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le A|x_1 - x_2\,|^{\lambda}$$

shartni qanoatlantirsin. Ushbu shartni qanoatlantirvchi funksiyalar Gyolderning sinfiga tegishli deyiladi.

Barcha $x_1, x_2 \in \Omega$, uchun, A doimiy va λ - Gyolder ko'rsatkichi deyiladi.

$\mathrm{H}^1(\Omega)$ sinfi ko'pincha Lipshits sinfi deb nomlanadi.

Kasrli tartibli intagral tushunchasi Abel integral tenglamasi bilan chambarchas bog'liq, shuning uchun ushbu tenglamani yechishdan boshlash qulay. Birinchidan, integrallanuvchi funksiyalar sinfiga formal yechimlarni beramiz. Abel tenglamasini yechimidan foydalanib, konstruktiv ravishda kasr tartibli integralning teskari operatsiyasi sifatida foydalanish mumkin.

Integro-differentsiatsiya nazariyasiga qo'shimcha tarixiy sharhlar keltiramiz.

Kasr tartibli hisob uzoq tarixga va juda boy tarkibga ega. Zamonaviy g'oyalarni ko'rib chiqishga o'tishdan oldin, kasr tartibli operatorlar nazariyasining rivojlanishini qisqacha ko'rib chiqamiz. Ularni fizik-kimyoviy modellashtirish quyida ko'rib chiqiladi. Leybnits tomonidan kasr tartibli hosila haqida ko'tarilgan masala 300 yildan ortiq (yuqorida aytib o'tilgan) vaqtdan beri takrorlanadigan mavzu bo'lib kelgan. Kasr tartibli hisobning hozirgi holati nashrlarning katta oqimi, jurnallarni yaratish va har yili xalqaro konferentsiyalar o’tkazish bilan tavsiflanadi.

Kasrli matematik analizga qiziqish klassik analizning paydo bo’lishi bilan deyarli bir vaqtda paydo bo’ldi (G. Leybnits 1695-yilda G. Lopitalga yozgan maktublarida ½ tartibli differentsiallar va hosilalarni ko’rib chiqishda bashoratli so’zlarni ifodalagan: «... Foydali oqibatlar vaqt o’tishi bilan bu paradoksdan kelib chiqadi»).

Ehtimol, bu masalani ko’proq yoki kamroq tizimli o’rganish XIX asrga to’g’ri keladi. va N. Abel (1823 yil), J. Liovil (1832 yil), B. Riman (1847 yil) va X. Holmgren (1864 yil) ga tegishli, garchi ilgari hissalar L. Eyler (1730 yil) va J. Lagranj (1772 yil) tomonidan kiritilgan .

Aynan o’zining asarlari davrida J. Liuvil (1832 - 1835 yillar) darajalar qatoridagi funksiyalarni kengaytirishdan foydalanib, atama bo’yicha differensiallash yo’li bilan «*q*» tartibli hosilasini aniqladi. U, xususan, matematik fizika masalalarini yechishda o’zi yaratgan nazariyaning birinchi amaliy qo’llanilishini berdi. Keyin B. Riman (1847 yil) butun bo’lmagan darajali qatorlar uchun mos aniq integralga asoslangan boshqa yechimni taklif qildi. B. Rimanning talabalik yillarida qilgan bu asari faqat 1876 yilda (o’limidan 10 yil o’tib) nashr etilgan. Liuvil va Riman konstruksiyalari kasr integralining asosiy shakllari hisoblanadi. Liuvil g’oyasini rivojlantirib, A. Grunvald (1867 yil) ayirm munosabatlarining chegarasi sifatida kasr hosilasi tushunchasini kiritdi.

Nazariy ishlar bilan bir qatorda, turli muammolarni hal qilish uchun kasr analizining qo’llanilishi ishlab chiqildi. Bunday birinchi qo’llanmalardan biri N.Abelning (1823 yil) kashfiyoti bo’lib, u tautoxron masalasining yechimini yarim butun tartibli hosila sifatida yoziladigan integral o’zgartirish orqali olish mumkinligini ko’rsatdi. Abel muammoni faqat ½ ga teng indeks qiymati bilan hal qilgan degan noto’g’ri tarixiy tushuncha mavjud.

Darhaqiqat, Abel yechimni umumiy holatda ko’rib chiqdi va uning ishi kasr tartibli integro-differentsial g’oyalarini rivojlantirishda katta rol o’ynadi. Xolmgrenning yutug’i kasr tartibli differensialni integralga teskari operatsiya sifatida ko’rib chiqish va bu tushunchalarni oddiy differensial tenglamalarni yechishda qo’llashdir.

Peterburg Fanlar akademiyasi (1884 yil) A.V. Letnikov (1837 – 1888 yillar), o’zining 20 yillik ilmiy faoliyati davomida ixtiyoriy ko’rsatkich bilan differentsialning to’liq nazariyasini ishlab chiqdi (hozirda uning asarlari deyarli butunlay unutilgan).

A.V. Letnikovning asarlari xorijda deyarli noma’lum bo’lib qolgan. Rossiyada A.V. Letnikovdan keyingi davrda N.Ya. Sonin va P.A. Nekrasovlar tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilgan. Ushbu rus olimlarining nomlari, shuningdek, kompleks tekislikdagi analitik funktsiyalar uchun Koshi formulasini integro-differentsial indeksining butun bo’lmagan qiymatlariga kengaytirish bilan bog’liq.

Yuqorida tilga olingan olimlarning ishlarining ahamiyatini e’tirof etgan holda, shuni ta’kidlash kerakki, kasr tartibli hisob faqat A.V. Letnikovning asarlaridan boshlab qat’iy matematik nazariyaga aylangan.

XIX asr oxiri 1892-yilda J. Hadamardning mazmunli asari nashr etilgan. Unda Teylor qatoriga kengaytirish asosida aylanadagi funksiya analitikasining radiusga nisbatan kasrli tartibli differensiali ko’rib chiqilgan, bu o’z navbatida Hadamard yondashuvi deb ataladi.

XX asrning birinchi yarmida. G. Xardi, G. Vayl, M. Riss, P. Montel, A. Marcho, D. Littlewood, J. Tamarkin, E. Post, S. L. Sobolev, A. Zigmund, B. Nagy, A. Erdeyi, X. Kober, J. Kossar va boshqa qator olimlar bu yo'nalishni rivojlantirishda o'z hissalarini qo'shganlar.

1915-yilda G. Xardi va M. Riss divergent qatorlarni yig'ish uchun kasr tartibli integraldan foydalanganlar. 1917-yilda G. Veyl davriy funksiyalar uchun kasrli tartibli integralni qandaydir maxsus funksiyaga ega bo'lgan konvolyutsiya sifatida aniqlagan.

S.N. Bernshteyning analogi algebraik polinomlarning chekli oraliqdagi kasr hosilalari uchun 1918-yilda P. Montel tomonidan berilgan. A. Marcho (1927 yil) ishida cheksizlikda «yomon» hatti-harakatlarga ega bo'lgan funktsiyalarga nisbatan qo'llaniladigan kasrli tartibli differentsialning yangi shakli Marshotning kasr hosilalari kiritilgan. M. Riss (1936, 1938, 1949 yillar) ishlarida potentsial tipdagi operatorlar (Riss potentsiallari) olingan. Bu esa bir necha o'zgaruvchilar funksiyalarining kasr integrasiyasini aniqlash imkonini bergan. Ayrim integral operatorlar va integral tenglamalar uchun Erdeyi va Kober (1940 yil) va boshqalarning kasr integrallari juda foydali bo'lib chiqqan.

Ayniqsa, radiofiziklar va radiotexniklar uchun O. Xevisayd (1892, 1893, 1920 yillar) tomonidan ishlab chiqilgan operativ hisob-kitoblar umumlashtirilgan hosilalarni qo'llashda muhim qadam bo'lib chiqqanini ta'kidlaymiz. O. Xevisayd (1920 yillar) elektr uzatish liniyalari nazariyasida kasrli tartibli differensialni qo'llagan. Shundan so'ng boshqa nazariyotchilar bu yondashuvning afzalliklarini tan olganlar va uni qabul qilingan matematik tushunchalarga muvofiq ishlab chiqa boshlaganlar (N. Wiener, J. Carson, 1926 yillar).

Kasr tartibli hosilalari va integrallar apparati fizika, mexanika, kimyo, gidrologiya, tortishish nazariyasi va boshqalarda ilmiy ishlarda [1-20] qo'llaniladi.

## FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES)

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа, 1959. 169 с.

2. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. -204 с.

3. Самко С.Т., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970.- 294 с.

5. Расулов Х.Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4.

6. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

7. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

8. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli

Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.

9. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.

12. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.

13. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

14. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

15. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

16. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

17. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

18. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

19. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

20. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).