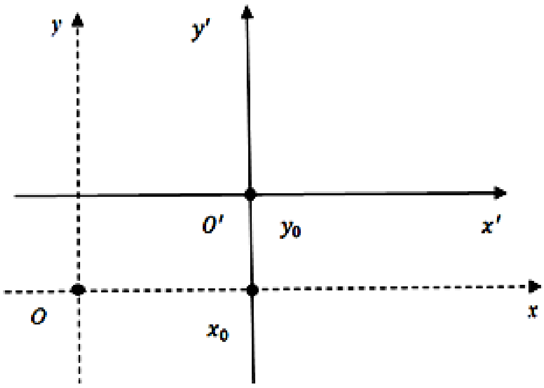
KOORDINATALARNI ALMASHTIRISH. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR KLASSIFIKATSIYASI VA ULARNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH

Bakirov S.D.
Toshkent Molita Instituti, 100000 Tashkent,
A.Temur Street 60A O'zbekiston,
tmikon@tfi.uz
bakirov5815@gmail.com

Annotatsiya: Ko'p hollarda berilgan masala yechimini soddalashtirish, chiziq tenglamasini ixcham va qulay ko'rinishda yozish uchun berilgan xOy Dekart koordinatalar sistemasidan boshqa bir $x'O'y'$ Dekart koordinatalar sistemasiga o'tishga to'g'ri keladi. Bunda quyidagi uch holni qarab chiqamiz.

I-hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish. Bunda berilgan xOy koordinatalar sistemasining boshi $O(0;0)$ biror $O'(x_0\,;\ y_0)$ nuqtaga parallel ko'chiriladi. Bunda Ox va Oy o'qlarning yo'nalishi va holati o'zgarmay qoladi va shu sababli bu yangi hosil bo'lgan sistemani $x'O'y'$ kabi belgilaymiz (1-chizma).

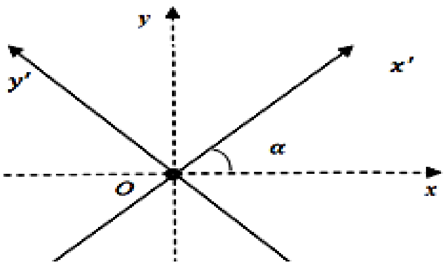


1-chizma

Bu eski xOy sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi $x'O'y'$ sistemadagi x' va y' koordinatalar orasidagi bog'lanish

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$ formulalar bilan ifodalanadi.

II-hol. Koordinatalar sistemasini burish. xOy koordinatalar sistemasining boshi $O(0;0)$ nuqta o'zgarmasdan, Ox va Oy o'qlar bir xil α burchakka buriladi. Bunda hosil bo'lgan yangi sistemani $x'Oy'$ deb belgilaymiz (2-chizma).



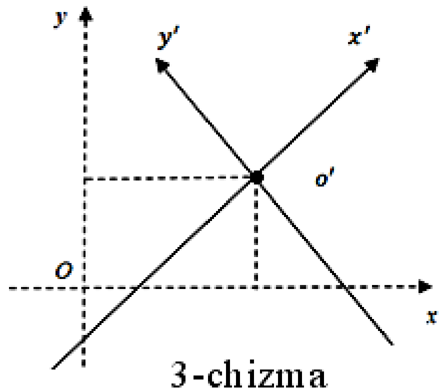
2-chizma

Bunda eski xOy sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi $x'Oy'$ sistemadagi x' va y' koordinatalar orasidagi bog'lanish

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

formulalar bilan ifodalanadi.

III-hol. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish. Bunda dastlab berilgan xOy koordinatalar sistemasining boshi $O(0;0)$ biror $O'(x_0;y_0)$ nuqtaga parallel ko'chiriladi. So'ngra hosil bo'lgan $x'O'y'$ sistemaning o'qlari bir xil α burchakka buriladi. Natijada yangi hosil bo'lgan sistemada ham koordinata boshi, ham o'qlar o'zgaradi (3-chizma).



3-chizma

Bunda eski xOy sistemadagi x va y koordinatalar bilan yangi $x'O'y'$ sistemadagi x' va y' koordinatalar orasidagi bo'g'lanish

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha \\ y' = (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}$$ formulalar bilan ifodalanadi.

xOy to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida ikkinchi tartibli egri chiziqlar umumiy holda

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (1) tenglama bilan beriladi.

Agar koordinatalar boshini $O(0;0)$ nuqtadan boshqa biror nuqtaga parallel ko'chirsak, yoki Ox va Oy o'qlarni biror α burchakka burish yoki parallel ko'chirish va burish orqali yangi koordinatalar sistemasiga o'tsak, u holda berilgan tenglama quyidagi tenglamalardan biriga keladi:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bu holda (1) tenglama ellipsni ifodalaydi.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$. Bu holda (1) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi. Ya'ni u bo'sh to'plamni ifodalaydi.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Bu holda (1) tenglamani faqat $O(0;0)$ nuqta qanoatlantiradi va u ikkita mavhum kesishuvchi to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$. Bu holda (1) tenglama kesishuvchi bir juft to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bu holda (1) tenglama giperbolani ifodalaydi.

6. $\frac{x^2}{a^2} = 1 => x^2 = a^2 => x = \pm a$. Bu holda (1) tenglama bir juft vertikal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

7. $\frac{x^2}{a^2} = -1 => x^2 = -a^2$. Bu holda (1) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi.

8. $x^2 = 0 => x = 0$. Bu holda (1) tenglama bir juft ustma-ust tushgan vertikal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

9. $\frac{y^2}{b^2} = 1 => y^2 = b^2 => y = \pm b$. Bu holda (1) tenglama bir juft gorizontal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

10. $\frac{y^2}{b^2} = -1 => y^2 = -b^2$. Bu holda (1) tenglamani birorta ham nuqta qanoatlantirmaydi.

11. $y^2 = 0 => y = 0$. Bu holda (1) tenglama bir juft ustma-ust tushgan gorizontal to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

12. $y^2 = 2px$. Bu holda (1) tenglama parabolani ifodalaydi.

(1) ko'rinishdagi umumiy tenglamaning A, B va C koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

determinanat xarakteristik determinant deyiladi.

Agar (1) tenglamada $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda tenglama elliptik turdagi tenglama deyiladi va u yuqorida ko'rib o'tilgan 1-3 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (1) tenglamada $\Delta < 0$ bo'lsa, u holda tenglamani giperbolik turdagi tenglmada deyiladi va u yuqorida ko'rib o'tilgan 4-5 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Agar (1) tenglamada $\Delta = 0$ bo'lsa, u holda tenglama parabolik turdagi tenglma deyiladi va u yuqorida ko'rib o'tilgan 6-12 kanonik tenglamalardan biriga keltiriladi.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. Ushbu II tartibli tenglamalar bilan berilgan chiziqlar ko'rinishini aniqlang:

1) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$;

2) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$.

Yechish: 1) Tenglamani ko'rinishini o'zgartiramiz:

$36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow 36(x^2 - x) + 36\left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) - 23 = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow 36\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+36\left[\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]-23=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-9+36\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-4-23=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+36\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=36 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[x'=x-\tfrac{1}{2}, y'=y-\tfrac{1}{3}\right] \Rightarrow x'^2+y'^2=1.$$

Demak, berilgan tenglama markazi $M(\frac{1}{2};\frac{1}{3})$ nuqtada joylashgan va radiusi $R=1$ bo'lgan aylanani ifodalaydi.

2. Berilgan tenglamani ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$16x^2+25y^2-32x+50y-359=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16(x^2-2x)+25(y^2+2y)-359=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16[(x-1)^2-1]+25[(y+1)^2-1]-359=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16(x-1)^2+25(y+1)^2=400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x'=x-1, y'=y+1) \Rightarrow 16(x')^2+25(y')^2=400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{16(x)^2}{400}+\frac{25(y')^2}{400}=1 \Rightarrow \frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1.$$

Demak, berilgan tenglama markazi $M(1;-1)$ nuqtada joylashgan va yarim o'qlari $a=5,\ b=4$ bo'lgan ellipsni ifodalaydi.

3. Chiziqning ushbu tenglamasi berilgan:

$$x^2-y^2=2a(x-y+a).$$

Agar $M(a;a)$ nuqtani yangi sistemaning boshi deb faraz qilib, yangi o'qlar uchun koordinata burchaklarining bissektrisalariga parallel bo'lgan chiziqlar qabul qilinsa, tenglamaning ko'rinishi qanday bo'ladi?

Yechish: Bu masalada yangi sistema boshining eski sistemaga nisbatan koordinatalari $(a;a)$ va ikkala sistemaning absissa o'qlari orasidagi burchak $\alpha=45°$ bo'ladi. Shuning uchun ushbu

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+x_0$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+y_0$$

formuladan foydalanamiz.

$$x=x'\bullet\cos 45°-y'\bullet\sin 45°+a=\frac{1}{2}x'\bullet\sqrt{2}-\frac{1}{2}y'\bullet\sqrt{2}+a$$

$y=x'\bullet\sin 45°+y'\bullet\cos 45°+a=\frac{1}{2}x'\bullet\sqrt{2}+\frac{1}{2}y'\bullet\sqrt{2}+a$ yoki bularni berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$(\tfrac{1}{2}x'\bullet\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}y'\bullet\sqrt{2}+a)^2-(\tfrac{1}{2}x'\bullet\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}y'\bullet\sqrt{2}+a)^2= \qquad =$$

$2a\left(-y'\sqrt{2}+a\right)$bo'ladi. Buni soddalashtirib,

$\left(x'\sqrt{2}a\right)\left(-y'\sqrt{2}a\right)=2a(-y'\sqrt{2}+a)$ yoki $x'y'=-a^2$ ni hosil qilamiz.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $A(3;1)$ nuqta, koordinata o'qlarini parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan yangi sistemada $A'(2;-1)$ nuqtaga o'tadi. Dastlabki va ko'chirilgan koordinatalar sistemasini yasang va A nuqtani belgilang.

Javob: $O'(1;2)$.

2. Agar koordinata boshi $A(-1;3)$ nuqtaga ko'chirilsa, $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+2\mathrm{x}\text{-}6\mathrm{y}+1=0$ aylana tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi.

Javob: $x,^2+y,^2=9$.

3. Koordinata o'qlarining yo'nalishini ma'lum bir o'tkir burchakka burganda, $A(2;4)$ nuqtaning yangi sistemadagi absissasi 4 ga teng bo'ladi. O'sha burchak topilsin. Ikkala sistema va A nuqta yasalsin.

Javob: $tg\varphi=\frac{3}{4}$.

4. Koordinata boshini ko'chirib

1) $x^2+4y^2-6x+8y=3$; 2) $y^2-8y=4x$;

3) $x^2-4y^2+8x-24y=24$; 4) $x^2+6x+5=2y$

tenglamalar soddalashtirilsin.

Javob: 1) $x^2+4y^2=16$; 2) $y^2=4x$;

3) $x^2-4y^2=4$; 4) $y=\frac{1}{2}x^2$.

5. Nuqtalari bo'yicha $xy=-4$ egri chiziq yasalsin va koordinata o'qlarini 45° ga burib, egri chiziq tenglamasi yangi sistemada yozilsin.

Javob: $x^2-y^2=8$.

6. Quyidagi tenglamalar bilan berilgan egri chiziqlarning ko'rinishini aniqlang:

1) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;

2) $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$;

3) $2y^2-x-12y+14=0$;

4) $x^2+y^2-6x-8y+25=0$;

5) $2x^2+3y^2-4x+6y-7=0$;

6) $x^2+2y^2+4x-8y+12=0$.

7. Koordinata o'qlarini burib, ushbu

1) $5x^2-4xy+2y^2=24$; 2) $2x^2+4xy-y^2=12$

egri chiziqlarning tenglamalari kanonik ko'rinishga keltirilsin va egri chiziqlar yasalsin.

Javob: 1) $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$.

8. Ushbu: 1) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

2) $x^2+2xy+y^2-4x-4y+3=0$ tenglamalar kanonik ko'rinishga

keltirilsin va bu tenglamalar bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar yasalsin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Baxvalov .S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to'plami.Toshkent,2006,546 bet.
2. Pogorelov A.V.Analitik geometriya. Toshkent, O'qituvchi,1983, 206 bet.
3. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Санкт-Петербург — Москва, Изд. Лан', 2003 г. стр. 336.
4. Ильин В. А. Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1981, с. 232.
5. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1979. с. 336.
6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука. 1998,
7. Кравченко К. Решения задач по аналитической геометрии,
8. http://www.a-geometry.narod.ru/