KOSHI TENGSIZLIGI VA UNING TADBIQLARI

Turg'unova Nodira Muxtoraliyevna
Farg'ona "Temurbeklar maktabi" harbiy akademik litseyi
Matematika fani o'qituvchisi

"Ta'lim sifatini oshirish - Yangi O'zbekiston taraqqiyotining yakkayu yagona to'g'ri yo'lidir" - ***Sh.Mirziyoyev***

(O'zbekiston Respublikasi prezidentini
oliy majlisga Murojaatnomasidan)

Annotatsiya: Maqolada, musbat sonlar uchun Koshi tengsizligi va uni tadbiqlari mukammal o'rganilgan. Abituriyentlar tomonidan ko'plab savollar keltirib chiqargan tengsizliklarni isbotlash mavzusiga doir ayrim misollarni yechilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirib o'tilgan, ularni oliy ta'lim muassasalariga tayyorlanish mashg'ulotlaridagi dolzarb o'rni, hozirgi kunda kirish imtixonlarida qo'llanilishi, yurtimizga bo'lajak vatanparvar va yetuk ilmiy kadrlarni tayyorlashdagi, ularning ilmiy ongini o'stirishdagi ahamiyati ochib berilgan.

Kalit so'zlar: kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazaryasi, nomanfiy sonlarning o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi uchun Koshi tengsizligi, Koshi-Bunyokovskiy tengsizligi, ko'phadlar uchun Koshi indeksi, sonli qatorlarda koshi alomati

Xozirgi vaqtda yurtimiz uchinchi renesans davri ilm fan taraqqiyoti bosqichida.Shuning uchun bugungi kunda respublikamizda matematika faniga, ayniqsa matematik olimpiadalarga katta e'tibor berilmoqda. Umuman olganda respublika, viloyat va xalqaro bosqich olimpiadalarida yosh matematiklarimiz ko'rsatayotgan natijalar yomon emas. Bir qator chet el matematika musobaqalarida berilgan matematik analiz kursi bo'yicha misollar tengsizliklarni isbotlash masalalariga bag'ishlangan. Shuning uchun maqola mavzusi bugungi kundagi dolzarb mavzulardan biri hisoblanadi.

Mazkur maqolaning maqsadi va vazifalari olimpiada bilan shug'ullanuvchi o'quvchilarga va ularning ustozlariga tengsizliklarni isbotlash hamda undan kelib chiquvchi natijalar haqida ma'lumot berish hamda ushbu teoremaning qo'llanilishiga doir namunaviy misollar yechib ko'rsatishdan iboratdir.

KOSHI TENGSIZLIGINING SODDA HOLLARI

Ixtiyoriy $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, ..., a_n \geq 0$ sonlar uchun ushbu

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ....a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu tengsizlikda tenglik faqat $a_1 = a_2 = ... = a_n$ bo'lganda bajariladi .

Boshqacha qilib aytganda, nomanfiy sonlar o'rta geometrigi ularning o'rta arifmetigidan oshmaydi va tenglik faqat bu sonlar bir-biriga teng bo'lganda bajariladi.

Bu tengsizlik Agyusten Lui Koshi tomonidan 1821 yilda isbot etilgan. Izoh: $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0,....,a_n \geq 0$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, (1) tengsizlikning chap tomoni no'lga aylanib, u ushbu $a_1 + a_2 + ...a_n \geq 0$ ko'rinish oladi.

Bu tengsizlikda tenglik faqat $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ bo'lganda bajariladi. Shuning uchun biz, (1) tengsizlikni isbotlashda $a_1 > 0, a_2 > 0...a_n > 0$ deb hisoblaymiz.

$n = 2,\ n = 3,\ n = 4$ bo'lgan hollarda Koshi tengsizligi osongina isbot qilinadi.

$n = 2$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. U holda (1) tengsizlik

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad (2)$$

ko'rinishida bo'ladi. (2) tengsizlik esa ushbu

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) \geq 0 \qquad (3)$$

tengsizlikka teng kuchli bo'ladi.

(3) tengsizlik o'rinli bo'lishi va tenglik faqat $a_1 = a_2$ bo'lganda bajarilishi ma'lum.

$n = 3$ bo'lsin. Bu holda Koshi tengsizligi ushbu

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

ko'rinishida bo'ladi.

$a = \sqrt[3]{a_1},\ b = \sqrt[3]{a_2},\ c = \sqrt[3]{a_3}$ belgilash kiritsak, u $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$ (4)

ko'rinish oladi. (4) tengsizlikni $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ tarzda yozib olib, chap tomoni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \geq 0, \qquad (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0, \quad \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geq 0.$$

Oxirgi tengsizlik o'rinli bo'lishi va tenglik faqat $a = b = c$ bo'lganda bajarilishi ravshan, demak $n = 3$ bo'lgan holda Koshi tengsizligi bajalishini ko'rsatdik.

$n = 4$ bo'lsin. Bu holda Koshi tengsizligi

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_{2.} \cdot a_3 \cdot a_4} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \qquad (5)$$

tarzda yoziladi. (5) tengsizlik (2) tengsizlikdan osongina kelib chiqadi:

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{a_3 \cdot a_4}} \leq \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

$n = 4$ bo'lgan holda o'rinli bo'lishi ko'rsatildi.

(1) tengsizlikdan quyidagi muhim natijalar kelib chiqadi :

1-Natija. Yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nomanfiy sonlar orasida ko'paytmasi eng katta bo'ladigani, bu bir-biriga teng sonlardir.

2-Natija. Ko'paytmasi o'zgarmas bo'lgan nomanfiy sonlar orasida yig'indisi eng kichik bo'ladigani bu bir –biriga teng sonlardir.

Bu natijalar eng katta va eng kichik qiymatlarni topishga doir masalalarda ishlatish mumkin.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING BIRINCHI USULI

$a_1, a_2, \ldots a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ma'lum. Shuning uchun $a_1 > 0, a_2 > 0 \ldots a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n}}, \ \ldots\ldots x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n}}$$

belgilardan so'ng quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo'ladi:

$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots . x_n = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall \ x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots . x_n > 0$

sonlar uchun $x_1 + x_2 + \ldots . + x_n \geq n$ (6)

bo'ladi va tenglik faqat $x_1 = 1, x_2 = 1, \ldots .., x_n = 1$

bo'lganda bajariladi.

Oxirgi tasdiqni matematik induksiya usulida isbotlaymiz.

$n = 2$ bajarilishini yuqorida ko'rsatilib o'tildi.

$n = k$ da to'g'ri deb olib , $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Ushbu $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots . \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$ (7)

tenglikni chap tomonidagi ko'paytichuvlar orasida shunday ikkitasi topiladiki, birinchisi 1 dan katta bo'lmaydi, ikkinchisi esa 1dan kichik bo'lmaydi. Agar bu fikr bajarilmasa, (7) tenglik ham bajarilmasligi ravshan. Qulayligi uchun $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ deb olamiz.

U holda
$$(1 - x_1)(x_2 - 1) \geq 0,$$
$$x_2 - 1 - x_1 x_2 + x_1 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 1 + x_1 x_2 \qquad (8)$$

bo'ladi . Ushbu $x_1 x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_k, x_{k+1}$

k ta son ko'paytmasi 1 ga teng bo'lgani uchun induksiya faraziga ko'ra

$$x_1 x_2 + x_3 + \ldots .. + x_{k+1} \geq k \qquad (9)$$

tengsizli o'rinli bo'ladi. (8) va (9) dan quyidagi baholash kelib chiqadi:

$$(x_1 + x_2) + x_3 + \ldots\ldots + x_{k+1} \geq (1 + x_1 x_2) + x_3 + \ldots + x_{k+1} \geq k + 1$$

Keltirilgan tasdiqni qismi isbotlandi.

Agar (6) tengsizlikda tenglik bajarilib, $x_1, x_2, \ldots .., x_n$ sonlar orasida 1 dan farqlisi bo'lsa, bu sonlar ko'paytmasi 1 bo'lgani uchun shunday ikkitasi topiladiki

(aytaylik x_1 va x_2), $x_1 < 1, x_2 > 1$

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1x_2 \Rightarrow n = x_1 + x_2 + ... + x_n > 1 + x_1x_2 + x_3 + ... + x_n \geq 1 + (n-1) = n$$

ziddiyat kelib chiqdi. Demak $x_1 \cdot x_2 \cdot ....x_n = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall$ $x_1 > 0, x_2 > 0, ...x_n > 0$ sonlar uchun $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$ (6)

Belgilashimizga qaytsak :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ....a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli ekani kelib chiqadi.

KOSHI TENGSIZLIGI ISBOTINING IKKINCHI USULI

$a_1, a_2, ..., a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Shuning uchun $a_1 > 0, a_2 > 0 ... a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\frac{a_1 + a_2 + ...a_n}{n}}, \quad x_2 = \frac{a_2}{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}}, \quad ....., x_n = \frac{a_n}{\frac{a_1 + a_2 + ...a_n}{n}}$$

belgilashlardan so'ng quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo'ladi:

$x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall$ $x_1 > 0, x_2 > 0 ....., x_n > 0$ sonlar uchun $x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n \leq 1$ (10)

bo'ladi va tenglik faqat $x_1 = 1, x_2 = 1, ..., x_n = 1$ bo'lganda bajariladi.

Bu fikrni matematik induksiya usulida isbotlaymiz:

$n = 2$ bo'lganda bajarilishini avvalroq ko'rsatgan edik .

$n = k$ da to'gri deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz.

Ushbu $x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} = k + 1$ (11)

tenglikning chap tomonidagi qo'shiluvchilari orasida shunday ikkitasi topiladiki, birinchisi 1 dan kichik bo'lmaydi va ikkinchisi 1 dan kichik bo'lmaydi. Agar fikr bajarilmasa, (11) tengli ham bajarilmasligi ma'lum. Qulayligi uchun $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ deb olamiz. U holda

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) \geq 0,$$
$$x_2 - 1 - x_1x_2 + x_1 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 - 1 \geq x_1x_2 \qquad (12)$$

bo'ladi. Ushbu $x_1 + x_2 - 1, \ x_3, \ x_4, ..., x_k, \ x_{k+1}$

k ta son yig'indisi k ga teng bo'lgani uchun induksiya faraziga ko'ra

$$(x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot ..... \cdot x_k \cdot x_{k+1} \leq 1 \qquad (13)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (12) va (13) tengsizliklardan quyidagi baholash kelib chiqadi: $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot .... \cdot x_{k+1} \leq (x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot .... \cdot x_{k+1} \leq 1$.

Keltirilgan tasdiqning birinchi qismi isbotlandi.

Agar (10) tengsizlikda tenglik bajarilib, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlar orasida birdan farqlisi bo'lsa, bu sonlar yig'indisi n bo'lgani uchun shunday ikkitasi tpiladiki (aytaylik x_1 *va* x_2), $x_1 < 1,\ x_2 > 1$ bo'ladi.

Bundan

$$(x_1 + x_2 - 1) > 1,$$

$$1 = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n < (x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \le 1$$

ziddyat kelib chiqadi.

Demak farazimiz to'gri ekan. Bu farazimizdan

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

tengsizlik kelib chaqadi.

MASALA YECHISH NAMUNALARI.

1-Misol. Perimetri $2p$ bo'lgan uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'lgan uchburchakni topish so'ralsin.

Yechish: Buning uchun Geron formulasi va Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \le \sqrt{p \cdot \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Demak, perimetri $2p$ bo'lgan ixtiyoriy uchburchakning yuzasi $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ dan oshmaydi. $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ ga faqat $p-a = p-b = p-c$, ya'ni $a=b=c$ bo'lganda teng bo'ladi. Bu esa, bir xil perimetrli uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'ladigan teng tomonli uchburchak bo'lishini bildiradi.

2-Misol. Ixtiyoriy uchburchak uchun ushbu

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 4p$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan tengsizlik chap tomonini guruhlab yozib olamiz va Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$\left(a^3 + \frac{1}{a}\right) + \left(b^3 + \frac{1}{b}\right) + \left(c^3 + \frac{1}{c}\right) \ge 2\sqrt{a^3 \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b^3 \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{c^3 \cdot \frac{1}{c}} =$$

$$= 2a + 2b + 2c = 4p$$

Bu yerda tenglik faqat

$a^3 = \frac{1}{a},\quad b^3 = \frac{1}{b},\quad c^3 = \frac{1}{c}$ bo'lganda, ya'ni $a=b=c=1$ bo'lganda bajariladi.

3-Misol. $y = x^2 + x^6 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, $(x > 0)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz. Buning uchun berilgan funksiyani ushbu

$y = x^2 + x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$ ko'rinishida yozib olamiz va Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$y \geq 7\sqrt[7]{x^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 7.$$

Bu yerda tenglik $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Demak, berilgan funksiyaning eng kichik qiymati 7 ekan.

4-Misol. $\sin^6 x + \cos^6 x$ ning eng kichik qiymatini toping.

Yechish: $\sin^6 x + \cos^6 x \geq 2\sqrt{\sin^6 x \cdot \cos^6 x} = 2\sin^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{4} sin^3 2x;$

$-1 \leq sin^3 2x \leq 1$ ekanligidan, $(sin^6 x + cos^6 x)_{min} = -\frac{1}{4}$ ga teng

5-Misol. $5a^8 + 10a^{-4}b^{-4} + 5b^8$ ifodaning eng kichik qiymatini toping.

Yechish:Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$5a^8 + 10a^{-4}b^{-4} + 5b^8 = 5a^8 + 5b^8 + 10a^{-4}b^{-4} = 5a^8 + 5b^8 + \frac{10}{a^4b^4}$$

$$5a^8 + 5b^8 = 5(a^8 + b^8) \geq 5 \cdot 2\sqrt{a^8b^8} = 10a^4b^4$$

$$5a^8 + 5b^8 + \frac{10}{a^4b^4} \geq 10a^4b^4 + \frac{10}{a^4b^4} = 10 \cdot \left(a^4b^4 + \frac{1}{a^4b^4}\right) \geq 10 \cdot 2\sqrt{a^4b^4 \cdot \frac{1}{a^4b^4}} = 20$$

Demak; $5a^8 + 10a^{-4}b^{-4} + 5b^8 \geq 20$

6-Misol. Agar x, y, z musbat sonlar bo'lsa, $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ ning eng kichik qiymatini toping.

Yechish:Qavslarni ochib chiqamiz:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1$$

Ixchamlab, o'zaro hadlari bir xil parametrlardan tashkil topgan kasrlarni yig'amiz:

$$3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$$

Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$3+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 3+\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}=6$$

Demak: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. $\begin{cases} p^2+q^2<20 \\ pq<22 \end{cases}$ bo'lsa, $|p+q|$ ning butun qiymatlari nechta?

2. $a=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 59$ va $b=30^{59}$ larni taqqoslang.

3. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$ bo'lsa, $\frac{2x^2}{x-1}$ ning eng katta qiymatini toping.

4. $p=a^2+b^2+c^2$ va $q=ab+ac+bc$ larni taqqoslang.

5. Agar $xy+yz+zx=16$ bo'lsa, $(x+y+z)^2$ ning eng kichik qiymatini toping.

6. Musbat a,b,c sonlar bo'lsa, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ ning eng kichik qiymatini toping.

7. Agar a,b,c - sonlar uchburchak tomonlari bo'lib, p - uchburchakning yarim peimetri bo'lsa, $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{abc}{8}$ tengsizlik o'rinli bo'lishini isbot qiling.

8. Ixtiyoriy uchburchak uchun $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$ bo'lishini isbotlang. Bunda a,b,c uchburchak tomonlari, s-esa uchburchak yuzasi.

9. Agar R,r- mos ravishda ABC uchburchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalar radiuslari bo'lsa, u holda $R\geq 2r$ bo'lishini isbotlang.

10. Uchburchakning yuzi S, tashqi va ichki chizilgan aylanalar radiuslari mos ravishda R,r - bo'lsa, $S\geq\sqrt{\frac{27}{2}R\cdot r^3}$ tengsizlikni isbotlang.

11. Agar a,b,c - uchburchak tomonlari, R – tashqi chizilgan aylananing radiusi bo'lsa, $R\geq\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$ tengsizlikni isbotlang.

12. Agar a,b,c- ixtiyoriy nomanfiy sonlar bo'lib, yig'indisi 3 ga teng bo'lsa, u holda $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$ tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

13. Aytaylik, a,b,c – musbat sonlar bo'lib, $a\cdot b\cdot c=1$ bo'lsin. U holda $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ bo'lishini isbotlang.

XULOSA

Mazkur maqola Koshi tengsizligi va uning isboti, ularni tengsizliklarni isbotlashda tadbiqini "Temurbeklar maktabi", barcha akademik litsey va maktab o'quvchilarini 10, 11-sinf o'quvchilariga tushuntirib berishga qaratilgan. Maqolada Oliy matematikada Koshining nomi bilan bog'liq bo'lgan teorema va terminlar ancha ko'p isbotlab ko'rsatilgan, hamda teorema yordamida yechiladigan bir nechta olimpiada masalalari, dars jarayonida uchraydigan murakkab misollar berilgan.

Maqolada olingan natijalar va usullar matematik analiz kursida muhim tushunchalardan biri boʻlgan oʻrta arifmetik va oʻrta geometrik qiymatlarni bogʻlash masalasi hal qilishda qo'llaniladi. Shuningdek ushbu maqoladan olimpiadalarga tayyorgarlik ko'rayotgan maktab va litsey oʻquvchilari ham foydalanishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Hasanov.A.B, Yaxshimurotov A.B "Koshi tengsizlikligi va uning tadbiqlari" Urganch-2003
2. Mirzaahmedov M.A, Sotiboldiyev D.A " O'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash" Toshkent-1993
3. Azlarov T, Mansurov H "Matematik analiz" 1-qism Tosh:1994
4. Nazarov X, Ostonov K "Matematika tarixi" Toshkent-1996
5.Toxirov.A, Mo'minov.F "Matematika olimpiada masalalari" Tosh:1996