PANJARADAGI KO'PI BILAN BITTA FOTONLI SPIN-BOZON MODELINING SPEKTRI VA REZOLVENTASI

Jumayeva Dilrabo Xolmurot qizi
Buxoro Davlat universiteti talabasi
E-mail: jumayevadilrabo414@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada kvant mexanikasida muhim hisoblangan ko'pi bilan bitta fotonli spin-bozon modelining panjaradagi analogiga doir misollar o'rganilgan. Uning spektri, muhim, nuqtali va diskret spektrlari uchun ma'lum munosabatlar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Spin-bozon modeli, foton, bozonli Fok fazo, diskret va muhim spektrlar.

Annotation. In this paper, a lattice spin-boson model with at most three photons, which is an important in quantum mechanics, is studied. The relations for its spectrum, essential, point and discrte spectra are given.

Key words: spin-boson model, block operator matrix, bosonic Fock space, creation and annihilation operators, essential, discrete and point spectra.

$\mathbb{C}$– bir o`lchamli kompleks sonlar fazosi bo'lsin. Ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun $L_2[a,b]^n$ orqali $[a,b]^n$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$H_0 := \mathrm{C}, H_n := L_2([a,b]^n), n \in N; \qquad H^{(m)} := \bigoplus_{n=0}^{m-1} H_n, \qquad H := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n.$$

1-ta'rif. H Hilbert fazoga Fok fazosi deyiladi, $H^{(m)}$ Hilbert fazosiga esa Fok fazosining qirqilgan m – zarrachali qism fazosi deyiladi.

Shunday qilib,

$H^{(1)} := H_0 \oplus H_1 = \{(f_0, f_1): f_k \in H_k, k = 0,1\};$

$H^{(2)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 = \{(f_0, f_1, f_2): f_k \in H_k, k = 0,1,2\};$

$H^{(3)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 = \{(f_0, f_1, f_2, f_3): f_k \in H_k, k = 0,1,2,3\};$

…………………………………………………………………………..

$H^{(m)} := H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_{m-1} = \{(f_0, f_1, \ldots, f_m): f_k \in H_k, k = \overline{0,m}\}.$

Odatda, $L_2[a,b]$ fazo yordamida qurilgan Fok fazosi $F(L_2[a,b])$ kabi belgilanadi.

$m \in N$ - fiksirlangan natural son bo'lsin. Ixtiyoriy ikkita

$f = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in H^{(m)}$ va $g = (g_0, g_1, \ldots, g_m) \in H^{(m)}$ vektor – funksiyalar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(f,g) = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + \ldots + (f_m, g_m)_m$$

kabi aniqlanadi, bu yerda $(f_0, g_0)_0 = f_0 \cdot \overline{g_0}$; $(f_k, g_k)_k = \int_a^b f_k(t) \cdot \overline{g_k(t)} dt, k = \overline{1, m}.$

Xuddi shuningdek, $f = (f_0, f_1, ..., f_m) \in H^{(m)}$ vektor – funksiyaning normasi

$$\| f \| = \sqrt{\sum_{k=0}^{m} \| f_k \|_k^2}$$

tenglik yordamida aniqlanadi [1-2], bunda

$$\| f_0 \|_0 := | f_0 |$$

$$\| f_k \|_k := \sqrt{\int_a^b | f_k(t) |^2 dt}, k = \overline{1, m}.$$

Endi H Fok fazosida skalyar ko‘paytma va normani aniqlaymiz. Ixtiyoriy ikkita

$F = (f_0, f_1, ..., f_n, ...) \in H$ va $G = (g_0, g_1, ..., g_n, ...) \in H$

elementlar uchun ularning skalyar ko`paytmasi

$$(F, G) := \sum_{k=0}^{\infty} (f_k, g_k)_k$$

kabi, F vektor – funksiya normasi esa

$$\| F \| := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \| f_k \|_k^2}$$

kabi aniqlanadi.

Ko‘rinib turibdiki, H_0 – bir o‘lchamli chiziqli fazo, ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun H_n cheksiz o‘lchamli chiziqli fazo bo`ladi. Demak, $H^{(m)}$ va H chiziqli fazolar cheksiz o‘lchamlidir. Masalan, ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun [3-4]

$$f^{(1)} := (0, t, 0, ..., 0) \in H^{(m)};$$

$$f^{(2)} := (0, t^2, 0, ..., 0) \in H^{(m)};$$

....

$$f^{(n)} := (0, t^n, 0, ..., 0) \in H^{(m)}.$$

elementlar chiziqli bog‘lanmagan. Haqiqatdan ham, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlari uchun

$$\alpha_1 f^{(1)} + \alpha_2 f^{(2)} + ... + \alpha_n f^{(n)} = \theta$$

tenglikni qaraymiz. Mazkur tenglik

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + ... + \alpha_n t^n = 0, \forall t \in [a, b]$$

tenglikka ekvivalentdir. Oxirgi tenglik ixtiyoriy $t \in [a, b]$ da o‘rinli bo`lishi uchun

$$\alpha_1 = \alpha_2 = .. = \alpha_n = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu esa o`z navbatida $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}$ elementlarning chiziqli bog‘lanmagan ekanligini bildiradi. Demak, $\dim H^{(m)} = \infty$ ekan.

Endi bozonli Fok fazo tushunchasini kiritamiz. Ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun $L_2^{sym}([-a, a]^n)$ orqali $[-a, a]^n$ da aniqlangan, istalgan ikkita argumenti bo‘yicha simmetrik bo`lgan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz [5].

$f_2(t_1,t_2)=\cos t_1+\cos t_2$ funksiya $L_2^{sym}([-a,a]^2)$ ga tegishli elementga $g_2(t_1,t_2)=\cos t_1-\cos t_2$ funksiya esa $L_2^{sym}([-a,a]^2)$ ga tegishli bo‘lmagan elementga misol bo`ladi.

2-ta`rif: Ushbu

$$F_b(L_2^{sym}([-a,a]^n)):=C\oplus L_2[-a,a]\oplus L_2^{sym}([-a,a]^2)\oplus L_2^{sym}([-a,a]^3)...$$

Hilbert fazosiga bozonli Fok fazo deyiladi.

Fok fazosining qirqilgan qism fazolaridagi elementlarning skalyar ko‘paytmasini va normasini hisoblashga doir misollar qaraymiz.

1-misol. $m=1$ bo`lsin.

$$f=(1,\cos t)\in C\oplus L_2[-\pi,\pi],$$
$$g=(i,\sin t)\in C\oplus L_2[-\pi,\pi].$$

elementlarning skalyar ko‘paytmasini va normasini toping.

Yechish. f va g larning skalyar ko‘paytmasini hamda normasini ta‘rif bo‘yicha hisoblaymiz:

$$(f,g)=1\cdot\bar{i}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cdot\sin t dt=-i;$$

$$\|f\|^2=|1|^2+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t dt=1+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=1+\pi$$

$$\|g\|^2=|i|^2+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t dt=1+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt=1+\pi.$$

2-misol. $m=2$ bo`lsin.

$$f=(2,\sin t_1,\cos t_1+\cos t_2)\in C\oplus L_2[-\pi,\pi]\oplus L_2([-\pi,\pi]^2);$$
$$g=(3+i,\cos t_1,\cos t_1-\cos t_2)\in C\oplus L_2[-\pi,\pi]\oplus L_2([-\pi,\pi]^2)$$

elementlarning skalyar ko‘paytmasini va normasini toping.

Yechish:skalyar ko‘paytma ta‘rifiga ko‘ra :

$$(f,g)=2\cdot\overline{(3+i)}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos t_1\cdot\sin t_1 dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t_1+\cos t_2)(\cos t_1-\cos t_2)dt_1dt_2=$$

$$=2\cdot(3-i)+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2t_1 dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 t_1-\cos^2 t_2)dt_1dt_2=6-2i;$$

Element normasini hisoblash formulasidan foydalanib, f va g elementlarning normalarini topamiz:

$$\|f\|^2=2^2+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t_1dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t_1+\cos t_2)^2dt_1dt_2=4+\pi+2\pi^2$$

$$\|g\|^2=|3+i|^2+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t_1dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t_1-\cos t_2)^2dt_1dt_2=10+\pi+2\pi^2.$$

3-misol. $C\oplus L_2[-\pi,\pi]$ fazodagi

$$f^{(1)}=(1,\cos 2t),\ f^{(2)}=(2,\cos^2 t)\ va\ \ f^{(3)}=(6,2)$$

elementlarni chiziqli bog‘langanlikka tekshiring.

Yechish: Trigonometriyadan yaxshi ma‘lum bo‘lgan $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ formulani inobatga olgan holda

$$f^{(1)} - 2f^{(2)} + \frac{1}{2} f^{(3)} = (1, \cos 2t) + (-4, -2\cos^2 t) + (3,1) =$$
$$= (1 - 4 + 3, \cos 2t - 2\cos^2 t + 1) = (0,0) = \theta$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Demak, $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ elementlar chiziqli bog‘langan ekan.

H - Hilbert fazosi, $A : H \rightarrow H$ biror chiziqli chegaralangan operator bo’lsin.

3-ta’rif. Agar biror $z \in C$ uchun $A - zI$ operator teskarilanuvchan bo’lsa, u holda z soni A operatorning regulyar nuqtasi, $Rz(A) = (A - zI) - 1$ operator esa uning rezolventasi deyiladi. A operatorning barcha regulyar nuqtalari to’plami $\rho(A)$ deb belgilanadi. $\sigma(A) = C\backslash\rho(A)$ to’plam A operatorning spektri deb ataladi. Demak spektr nuqtalari quyidagilardan iborat bo’lishi mumkin:

1. $A - zI$ operator umuman teskarilanuvchan emas. Demak $(A - zI)x = 0$ tenglama nolmas yechimga ega. Bu holda z soni A operatorning xos qiymati, nolmas x esa xos vektori deyiladi.

2. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, lekin chegaralanmagan. Bu holda z soni A operatorning uzluksiz spektriga tegishli deyiladi.

3. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, chegaralangan, lekin $A - zI$ ning qiymatlar sohasi butun fazoga teng emas. Bu holda z soni qoldiq spektrga tegishli deyiladi.

A operatorning z xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan hosil qilingan fazoning o’lchami z xos qiymatning karraliligi deyiladi. Agar z ning karraliligi 1 ga teng bo’lsa, u oddiy xos qiymat, aks holda karrali xos qiymat deb ataladi. A operatorning chekli karrali xos qiymatlari to’plamini diskret spektr deb ataymiz va $\sigma_{disc}(A)$ deb belgilaymiz. A operatorning uzluksiz spektrini $\sigma_{cont}(A)$ deb, qoldiq spektrini esa $\sigma_{res}(A)$ deb belgilaymiz. Odatda operatorning uzluksiz spektri va cheksiz karrali xos qiymatlari to’plami muhim spektr deb ataladi va $\sigma_{ess}(A)$ kabi belgilanadi.

1-teorema. Ixtiyoriy chegaralangan A operatorning spektri yopiq to’plam.

Isbot. Biz spektrning to’ldiruvchisi $\rho(A)$ ning ochiqligini ko’rsatsak, yetarli. Buning uchun quyidagi Lemmadan foydalanamiz.

1-lemma. A chegaralangan operator va $\|A\| < 1$ bo’lsin. U holda $I - A$ operator teskarilanuvchan. Teoremaning isbotiga o’tamiz. Ixtiyoriy $z_0 \in \rho(A)$ ni qaraymiz. U holda quyidagi munosabat o’rinli: $A - zI = A - z_0 I - (z - z_0)I = (A - z_0 I)(I - (z - z_0)R\, z_0(A))$. Endi z ni shunday tanlash mumkinki, $|z - z_0| \, \|R_{z_0}(A)\| < 1$. U holda lemmaga asosan $I - (z - z_0)R_{z_0}(A)$ teskarilanuvchan. z_0 ning aniqlanishidan $A - z_0 I$ teskarilanuvchan. U holda $A - zI$ ham teskarilanuvchan bo'ladi. Bu yerdan z_0o'zining biror atrofi bilan $\rho(A)$ ga tegishli ekani, ya'ni $\rho(A)$ ning ochiq ekanini hosil qilamiz. Teorema isbotlandi. N Agar $|z| > \|A\|$ bo'lsa, $\|z^{-1}A\| < 1$ bo'ladi. U holda $A - zI = -z(I - z^{-1}A)$ ekanidan Lemmaga asosan$-z(I - z^{-1}A)$ va demak $A - zI$ teskarilanuvchan. Demak, bu holda $z \in \rho(A)$. Shunday qilib chegaralangan A operatorning spektri markazi 0 nuqtada bo'lgan $\|A\|$ radiusli doira ichida to'liq saqlanadi. Demak A chegaralangan bo'lsa, $\rho(A)$ chegaralanmagan.

Teorema va lemmaning isboti [1, 5] larda keltirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Расулов Т.Х. О свойстве уравнения типа Вайнберга для Гамильтониана одной системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц. Тезисы докладов международней научной конференции "Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей" Тошкент, 2005, стр 150-152

2. Саримсоков Т.А. Функционал анализ курси. Тошкент, ўқитувчи 1980, 9-73-bet

3. Расулов Т.Х. О дискретном спектре одного модельного оператора в пространстве Фока. Теоретическая и математическая физика. 2007, T.152, №3 стр 518-528

4. Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H., Egamberdiyev O.I. Funksional analiz. Toshkent-Samarqand 2009, 110-367-bet.

5. S.N.Lakaev and Minlos R.A. On bound states of the cluster operator, Theor.and Math.Phys.39(1979), No.1, pp. 336-342.