ANIQMAS INTEGRAL VA UNING BA’ZI IQTISODIY TATBIQLARI

Ostonaqulov Dilshod Ismatilla o‘g’li
E-mail: dilshodostonakulov0@gmail.com
Toshkent Moliya instituti, Toshkent, O‘zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada aniqmas integral tushunchasi va uning sodda xossalari, aniqmas integralni hisoblashning sodda qoidalari va uning iqtisodiy masalalarga tatbiqlari keltirilgan.

Kalit so‘zlar: aniqmas integral, aniqmas integralning sodda xossalari, marjinal daromad funksiyasi, yalpi daromad funksiyasi, marjinal harajat funksiyasi, marjinal foyda funksiyasi, marjinal mehnat unumdorlik funksiyasi, talab egiluvchanlik funksiyasi, ishlab chiqarish funksiyasi, taklif egiluvchanligi

Kirish. Daromad - bu korxona o‘z tovarlari yoki xizmatlarini ma’lum bir narxda sotish orqali oladigan pul miqdori. Bu kompaniyaning daromadlari to‘g’risidagi hisobotining boshlang’ich nuqtasi bo‘lib, u harajatlar, soliqlar va foizlar hisobga olingandan keyin qancha sof foyda olishini belgilaydi. Shunday qilib, u biznes uchun eng muhim qator elementlaridan biridir. Bu bitta raqam bo‘lishi mumkin bo‘lsa-da, unga qarashning turli usullari mavjud. Bu turli darajadagi tushunchalar - bizneslar, tahlilchilar va investorlar uchun foydalidir. Daromadning eng keng tarqalgan shakllaridan ikkitasi umumiy daromad va marjinal daromaddir. Umumiy daromad korxona tomonidan ishlab chiqarilgan pulning umumiy miqdorini bildirsa, marjinal daromad mahsulot yoki xizmatning qo‘shimcha bir birligini sotish orqali erishilgan daromadning o‘sishini anglatadi. Biz bu maqolada aniqmas integraldan foydalanib marjinal daromad funksiyasi berilgan holda uning yalpi daromad funksiyasini, marjinal harajat funksiyasi berilgan holda uning umumiy harajat funksiyasini va shunga o‘xshagan masalalarni ko‘rib chiqamiz.

ASOSIY QISM

1^0. Aniqmas integral ta’rifi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda (bu interval chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin) aniqlangan bo‘lib, $F(x)$ funksiya esa shu intervalda differensiallanuvchi bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $\forall x \in (a,b)$ da

$$F'(x) = f(x) \text{ yoki } dF(x) = f(x)dx$$

bo’lsa, $F(x)$ funksiya (a,b) da $f(x)$ ning *boshlang’ich funksiyasi* deyiladi.

Masalan:

1) $f(x) = x^2$ funksiyaning $R = (-\infty, +\infty)$ dagi boshlang’ich funksiyasi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ bo’ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 = f(x).$$

2) $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning $(-1,1)$ intervaldagi boshlang’ich funksiyasi $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ bo‘ladi, chunki

$$F'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=f(x).$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da aniqlangan bo‘lib, $F(x)$ funksiya shu segmentda differensiallanuvchi bo‘lsin.

Ta’rif. Agar

$$F'(x)=f(x) \qquad (x\in(a,b))$$

bo‘lib,

$$F'(a+0)=f(a). \qquad F'(b-0)=f(b).$$

bo‘lsa, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ da $f(x)$ ning *boshlang’ich funksiyasi* deyiladi.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ shu oraliqda har doim boshlang’ich funksiyaga ega bo‘ladi.*

$F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalarning har biri $f(x)$ funksiya uchun boshlang’ich funksiya bo‘lsin:

$$F'(x)=f(x), \quad \Phi'(x)=f(x).$$

Demak, $F'(x)=\Phi'(x)$. Bundan

$$F(x)=\Phi(x)+C \qquad (C=const)$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang’ich funksiyalari bir-biridan o‘zgarmas songa farq qiladi va istalgan boshlang’ich funksiyasi ushbu ko’rinishda ifodalanadi:

$$F(x)+C \qquad (C=const).$$

Ta’rif. $f(x)$ funksiya boshlang’ich funksiyalarining umumiy ifodasi $F(x)+C$ $(C=const)$ shu $f(x)$ *funksiyaning aniqmas integrali* deb ataladi va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Bunda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak,

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Masalan,

$$\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

bo‘ladi, chunki hosila olish qoidalariga ko‘ra

$$\left(\frac{2^x}{\ln 2}+C\right)'=2^x.$$

2[0] Aniqmas integralning sodda xossalari.

1) $f(x)$ funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning differensiali $f(x)dx$ ga teng:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

Bu xossa avval differensial belgisi d, so‘ngra integral belgisi $\int$ kelib, ular yonma-yon turganda o‘zaro bir-birini yo‘qotishini ko‘rsatadi.

2) Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o‘zgarmas son yig’indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Yuqorida keltirilganlardan, differensiallash (funksiyaning hosilasini hisoblash) hamda integrallash (funksiyaning aniqmas integralini hisoblash) amallari o‘zaro teskari amallar ekanligi kelib chiqadi.

Ayni paytda funksiya hosilasi hisoblanganda natija bitta funksiya bo‘lsa, uning aniqmas integrali hisoblanganda esa natija cheksiz ko‘p funksiya (ular bir-biridan o‘zgarmas songa farq qiladi) bo‘ladi. Aniqmas integral deb yuritilishining boisi ham shu.

3^0 Integrallashning sodda qoidalari.

1) Agar $f(x)$ funksiya boshlang’ich funksiyaga ega bo‘lsa, u holda $kf(x)$ (k-o‘zgarmas son) funksiya ham boshlang’ich funksiyaga ega va $k \neq 0$ da

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

2) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar boshlang’ich funksiyalarga ega bo‘lsa, $f(x)+g(x)$ funksiya ham boshlang’ich funksiyaga ega va

$$\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Odatda bu xossa integralning *additivlik xossasi* deyiladi.

Endi aniqmas integralning iqtisodiyotga ba’zi tatbiqlari bilan tanishib chiqamiz.

Agar firmaning marjinal daromad funksiyasi $MR(Q)$ berilgan bo‘lsa, ya’ni

$$MR(Q) = F(Q)$$

funksiya ma’lum bo‘lsa, u holda firmaning yalpi daromad funksiyasi quyidagi aniqmas integral yordamida topiladi:

$$R(Q) = \int MR(Q)dQ = \int f(Q)dQ = F(Q) + C$$

Bu yerda $F(Q)$- boshlang‘ich funksiya.

1-misol. Firmaning marjinal daromad funksiyasi

$$MR(Q) = 200 - 20Q$$

ko‘rinishida berilgan. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarilganda firmaning umumiy daromadi $R(Q)=2000$ sh.p.b. ni tashkil etsa, u holda yalpi daromad funksiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Yechish. Umumiy daromad funksiyasi $R(Q)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$R(Q) = \int (200 - 20Q)\,dQ = 200Q - 10Q^2 + C.$$

$Q=10$, $R(Q)=2000$ bo‘lganidan foydalanib, $C=1000$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, firmaning yalpi daromad funksiyasi

$$R(Q) = 200Q - 10Q^2 + 1000$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Xuddi shuningdek, marjinal xarajat va foyda funksiyalari ma’lum bo‘lganda, umumiy harajat va yalpi foyda funksiyalarini ham aniqmas integraldan foydalanib topish mumkin.

2-misol. Firmaning marjinal xarajat funksiyasi

$$MC(Q) = 3Q^2 + 4Q + 5$$

ko‘rinishga ega. Agar $Q=0$ da firmaning harajati 300 sh.p.b. ni tashkil etsa, u holda uning umumiy harajat funksiyasini toping.

Yechish. Umumiy harajat funksiyasi $C(Q)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$C(Q)=\int\left(3Q^2+4Q+9\right)dQ$$

$$C(Q)=Q^3+2Q^2+9Q+k$$

$$C(Q)=300,\ \ Q=0\ da\ \ k=300.$$

Demak, umumiy harajatlar funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$C(Q)=Q^3+2Q^2+9Q+300.$$

3-misol. Firmaning marjinal foyda funksiyasi

$$MF(Q)=-3Q^2+150Q+100$$

ko'rinishga ega. Agar $Q=10$ birlik mahsulot ishlab chiqarilganda firmaning foydasi $F=8000$ sh.p.b. ga teng bo'lsa, u holda uning yalpi foyda funksiyasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

Yechish. Marjinal foyda funksiyasi ma'lum bo'lganda yalpi foyda funksiyasini quyidagi integral yordamida topamiz:

$$F(Q)=\int MF(Q)dQ=\int\left(-3Q^2+150Q+100\right)dQ=-Q^3+75Q^2+100Q+C.$$

$Q=10$ da ekanligini nazarga olib, $C=500$ ekanligini topamiz. Demak, yalpi foyda funksiyasi

$$F(Q)=-Q^3+75Q^2+100Q+500$$

ko'rinishga ega.

Ma'lumki, marjinal mehnat unumdorligi $MQ(L)$ ishlab chiqarish funksiyasi $Q(L)$ dan olingan birinchi tartibli hosiladan iborat. Shu sababli ishlab chiqarish hajmini mehnatning funksiyasi sifatida aniqlash uchun marjinal mehnat unumdorligini integrallaymiz, ya'ni

$$Q(L)=\int MQ(L)dL.$$

4-misol. Marjinal mehnat unumdorlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda berilgan.

$$MQ(L)=\frac{4}{\sqrt{L}}-2$$

Agar ishlab chiqarishda $L=9$ ta kishi ishlaganda 10 ta mahsulot ishlab chiqarilsa, u holda ishlab chiqarish funksiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

Yechish. Ishlab chiqarish funksiyasi $Q(L)$ ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$Q(L)=\int MQ(L)dL=\int\left(\frac{4}{\sqrt{L}}-2\right)dL=8\sqrt{L}-2L+C$$

$L=9$ da $Q(L)=10$ ekanligini inobatga olib, $C=4$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, ishlab chiqarish funksiyasi

$$Q(L)=8\sqrt{L}-2L+4$$

ko'rinishga ega ekan.

Deylik, talab egiluvchanlik funksiyasi

$$E_{Q_D}(P) = f'(P)\cdot\frac{P}{Q_D} = P\cdot\frac{f'(P)}{f(P)},$$

ma’lum bo‘lsin. U holda talab funksiyasi aniqmas integral yordamida aniqlanadi. Buning uchun

$$\frac{E_{Q_D}(P)}{P} = \frac{f'(P)}{f(P)},$$

tenglikni hosil qilib, uning ikki tomonini integrallaymiz.

$$\int\frac{f'(P)}{f(P)}dP = \int\frac{E_{Q_D}(P)}{P}dP + C.$$

5-misol. Talabning narx bo‘yicha egiluvchanlik funksiyasi

$$E_D(P) = \frac{-P^2}{170-P^2}, \qquad 0 < P < 13,$$

ko‘rinishga ega. Agar tovar narxi $P = 7$ sh.p.b. ga teng bo‘lganda unga bo‘lgan talab $Q_D = 550$ bo‘lsa, u holda talab funksiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Yechish.

$$f'(P)\cdot\frac{P}{Q_D} = \frac{-P^2}{170-P^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(P)}{f(P)} = \frac{-P}{170-P^2}.$$

Hosil bo‘lgan tenglikning ikki tomonini integrallaymiz:

$$\int\frac{f'(P)}{f(P)}dP = \int\frac{-P}{170-P^2}dP.$$

va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\ln f(P) = \frac{1}{2}\ln\left(170-P^2\right) + \ln C.$$

Bu tenglikdan $f(P)$ funksiyani aniqlaymiz.

$$f(P) = C\sqrt{170-P^2},$$

Bu tenglikka boshlang‘ich shartlarni qo‘yib topamiz.

$$550 = C\sqrt{170-49} \Rightarrow 550 = C\sqrt{121} \Rightarrow C = 50.$$

Demak, talab funksiyasi

$$f(P) = 50\sqrt{170-P^2},$$

ko‘rinishga ega.

Agar taklif egiluvchanligi,

$$E_{Q_S}(P) = \varphi'(P)\cdot\frac{P}{Q_S} = P\cdot\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$$

ma’lum bo‘lsa, u holda taklif funksiyasi $\varphi(P)$ aniqmas integral yordamida topiladi. Buning uchun yuqoridagi tenglikni quyidagi

$$\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)} = \frac{E_{Q_S}(P)}{P},$$

ko‘rinishda yozamiz. So‘ngra tenglikning ikki tomonini integrallaymiz va topamiz:

$$\int\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}dP = \int\frac{E_{Q_S}(P)}{P}dP + C.$$

6-misol. Taklifning narx bo‘yicha egiluvchanlik funksiyasi

$$E_S(P)=\frac{12P^2+39P}{(3+2P)\cdot(15+3P)}$$

ko‘rinishga ega. Agar tovar narxi $P=3$ sh.p.b. ga teng bo‘lganda taklif $Q_S=1080$ birlik bo‘lsa, u holda taklif funksiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Yechish. Masalaning shartiga ko‘ra,

$$\varphi'(P)\frac{P}{Q_S}=\frac{12P^2+39P}{(3+2P)\cdot(15+3P)}.$$

Bundan

$$\frac{\varphi'(P)}{Q_S}=\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}=\frac{12P+39}{(3+2P)\cdot(15+3P)}.$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\ln\varphi(P)=\int\frac{12P+39}{(3+2P)\cdot(15+3P)}dP.$$

Bundan

$$\ln\varphi(P)=\ln(3+2P)(15+3P)+\ln C$$

va nihoyat

$$\varphi(P)=C(3+2P)(15+3P)$$

funksiyani hosil qilamiz. Bundan, boshlang‘ich shartlarni nazarga olib topamiz:

$$\varphi(3)=1080=C(3+6)(15+9)\ \Rightarrow\ C=5.$$

Demak, taklif funksiyasi

$$\varphi(P)=5(3+2P)(15+3P)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Ma’lumki, agar $M(t)$ kattalik biror-bir kompaniyaning t vaqtdagi fondini ifodalasa, u holda $\frac{dM(t)}{dt}$ - kattalik bu kompaniyadagi dt vaqtdagi pul oqimini bildiradi. Faraz qilamiz qandaydir bankda bir yillik pul oqimi o‘zgarmas $\frac{dM(t)}{dt}=k=const.$ bo‘lsin. U holda bu bankning t vaqtdagi fondi quyidagicha aniqlanadi:

$$M(t)=\int kdt=kt+C.$$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Ostonaqulov D.I., **Sog’lom raqobat muhitini ta’minlash,** “Erkin bozor mexanizmlarini joriy etish hamda sog’lom raqobat muhitini yaratish orqali hududlarda tadbirkorlikni rivojlantirish istiqbollari” mavzusida respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjuman ilmiy maqolalar va tezislar to’plami. pp 203-205, Andijon, AndMI, 2023. 1080 b.
2. Ostonaqulov D.I., **Hududlarda tadbirkorlikni rivojlantirish,** “Erkin bozor mexanizmlarini joriy etish hamda sog’lom raqobat muhitini yaratish orqali hududlarda tadbirkorlikni rivojlantirish istiqbollari” mavzusida respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjuman ilmiy maqolalar va tezislar to’plami. pp 364-368, Andijon, AndMI, 2023. 1080 b.

3. Ostonaqulov D.I., **Mamlakatning iqtisodiy o'sishini ta'minlash**, "Erkin bozor mexanizmlarini joriy etish hamda sog'lom raqobat muhitini yaratish orqali hududlarda tadbirkorlikni rivojlantirish istiqbollari" mavzusida respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjuman ilmiy maqolalar va tezislar to'plami. pp 801-805, Andijon, AndMI, 2023. 1080 b.
4. Ostonaqulov D.I., **Digital Economy,** Open Academia: Journal of Scholarly Research, Volume 1, Issue 1, pp 48-55, April, 2023, Chile
5. Ostonaqulov D.I. **Integration and applications in economic dynamics,** Open Herald: Periodical of Methodical Research, Volume 1, Issue 4, July, 2023, ISSN (E): 2810-6385, pp. 9-14, Chile
6. Sotvoldiyev A.I., Ostonaqulov D.I., **Mathematical models in economics**, Spectrum Journal of Innovation, Reforms and Developmen, Volume 17, July, 2023, ISSN (E): 2751-1731, pp. 115-119, Germany
7. Sotvoldiyev A.I., **Mathematics of economic processes nature and methods of modeling,** Science and education scientific journal. Tashkent. 2023. Vol. 4, No. 3. pp. 829-835.