ISSN 2181-3187

ЭЛАСТИКЛИК НАЗАРИЯСИДА КЎРИЛАДИГАН АСОСИЙ МАСАЛАЛАРНИНГ ТАВСИФЛАРИ ВА ХУЛОСАЛАРИ

Алмардонов Ойбек Махматқулович

ҚарМИИ катта ўқитувчиси

Аннотация: Ушбу мақолада эластиклик назарияси учун муҳим аҳамият касб этадиган тўғри, тескари ва текис масалалар, уларнинг тенгламалари, ҳамда ечимлари келтириб ўтилган.

Калит сўзлар: деформация, кучланиш, кўчиш компоненталари, чегаравий шартлар, ҳажмий кучлар.

Эластиклик назариясида асосан қуйидаги масалалар кўриб ўтилади.

1. Эластиклик назариясининг тўғри масаласи

Тўғри масалада, жисмнинг чегарасидаги кучланишлар ва массавий кучлар берилиб, жисм ичидаги кучланишлар ва деформациялар ва кўчишларни топиш талаб қилинади.

Айрим ҳолларда, жисм чегарасининг бирон-бир қисмида кучланиш бошқа қисмида кўчишлар берилиб жисм ичидаги кучланишлар ва кўчишларни топиш талаб қилинади. Бундай масалада чегаравий шартлар аралаш кўринишда берилади. Шундай қилиб эластиклик назариясининг тўғри масаласида, чегаравий шартларга кўра жисм ичига тегишли 3 та u , v , w кўчиш компонентаси, 6 та $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$ деформация тензори компоненталари, $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$ кучланиш тензори компоненталарини жисм нуқтасининг координатаси функцияси сифатида топиш талаб қилинади, яьни 15 та номаьлумни 15 та тенгламалар системасини чегаравий ва биргаликда бўлиш шартларини қаноатлантирувчи ечимларини топишга келади.

Бундай масалалар жуда қийин ҳисобланиб ҳар доим ҳам аналитик ечимларни топиб бўлмайди.

2. Эластиклик назариясининг тескари масаласи

Тескари масалада жисмнинг ички нуқталаридаги кучланиш, деформациялар ва кўчиш компоненталари берилиб, деформациянинг ҳолатига мос келувчи жисм чегарасидаги шартларни аниқлаш талаб қилинади. Эластиклик назариясининг тескари масаласи анчагина осон ҳал бўлади. Айниқса жисм ичидаги кўчиш майдони берилган бўлса, бу масала жуда содда ечилади, яьни оддий дифференциаллаш амали орқали ҳал бўлади. Эластиклик назариясига тегишли масалаларни кўчишларда ечиш учун Навье (тенгламалар системасини кўчишларда ёзиш керак.

ISSN 2181-3187

Бунинг учун, Коши тенгламалари ёрдамида кучланишларни кўчиш компоненталари орқали ифодалаб

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\Delta = 2G\varepsilon_x + \lambda(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}),$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\Delta = 2G\varepsilon_y + \lambda(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}), \qquad (1)$$

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_z + \lambda\Delta = 2G\varepsilon_z + \lambda(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \qquad \gamma_{xz} = G\tau_{xz}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Олинган ифодаларни Навье, мувозанат тенгламаларига қўйиб:

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial\Delta}{\partial x} + \dfrac{X}{G} = 0, \\ \nabla^2 v + \dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial\Delta}{\partial y} + \dfrac{Y}{G} = 0, \\ \nabla^2 w + \dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial\Delta}{\partial z} + \dfrac{Z}{G} = 0. \end{cases}$$

Бунда ∇^2- дифференциал оператор бўлиб ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \Delta - \text{эса} \quad \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Келтириб чиқарилган (1) тенгламалар системаси Ляме тенгламалари деб аталади ва интеграллаш амалидан сўнг *u (x,y,z), v(x,y,z), w (x,y,z)* кўчиш компоненталари топилади. Деформациянинг биргаликда бўлиш шартларига тўхталадиган бўлсак, бу шартлар тўғридан – тўғри айниятга айланади.

Кўпгина ҳолларда эластиклик назариясида чегаравий шартлар кучланишларда берилади. Бундай ҳолларда тенгламалар системасини кўчишлардаги кўриниши қулай бўлади, яьни шундай кучланиш тензори компоненталарини топиш керакки, бу компоненталар Навье тенгламаларини, чегаравий шартларни ва деформациянинг биргаликда бўлиш шартларини қаноатлантириши керак. Коши муносабатларидан фойдаланиб деформация тензори компоненталарини кучланиш тензори компоненталари орқали ифодалаб, Сен- Венан шартларига қўйсак:

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0, \qquad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y} = 0,$$

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0, \qquad \nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial z} = 0, \qquad (2)$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0, \qquad \nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial z} = 0.$$

ISSN 2181-3187

Бельтрами – Митчел тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бунда $S=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$. Шундай қилиб, эластиклик назариясининг масаласи (2) – 6 та тенгламалар системасиниг чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топишга келар экан. Топилган кучланиш компоненталарини Коши муносабатларига қўйиб, деформация тензори компоненталарини интеграллаб, кўчиш компоненталарини аниқлаймиз.

Юқорида келтирилган иккита ҳолдан ташқари Сен- Венан томонидан кўрилган ярим тескари метод ҳам мавжуд. У томонидан таклиф қилинган усулда масаланинг қўйилишига қараб кўчиш ва кучланиш компоненталарининг бир қисми берилиб, қолган компоненталар эса эластиклик назариясининг тенгламаларидан топилади. (Навье тенгламалари, чегаравий шартлар). Бу усул ёрдамида Сен-Венан кўрдаланг кесими доиравий бўлмаган брусснинг буралиши ва эгилиши масалаларининг аналитик ечимларини топган. Яримтескари усулни умумий деб қараб бўлмайди. Кўп ҳолларда бу усул ёрдамида масалалар ечиш, юқори тажриба ва маҳорат талаб қилади.

3. Эластиклик назариясининг текис масаласи

Жисм текис деформацияланиш ҳолатида дейилади, агар жисм нуқталарининг кўчишлари битта текисликка параллел бўлса ва текисликка перпендикуляр йўналишдаги (нуқталарнинг) координатага боғлиқ бўлмаса. Агар деформация текислиги сифатида $0xy$ текислиги олинса, у ҳолда

$$u=u(x,y),\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$
$$v=v(x,y),\qquad \gamma_{xz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0, \tag{3}$$
$$w=0,\qquad \gamma_{xz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Ўз навбатида $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ ва σ_z эса $\varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y))$, муносабатдан аниқланади яьни : $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$.

Шундай қилиб, текис деформация ҳолатида эластиклик назариясининг масаласи анчагина соддалашади ва фазовий масала икки ўлчовли масалага келади.

Ҳақиқатдан ҳам,

$$\varepsilon_z=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0 \text{ ва } z=0$$

Бу ҳолда Навье тенгламаларидан иккитаси қолади ва учта $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ кучланиш компоненталарига нисбатан тенгламалар қолади.

Бунга кўра Навье тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

ISSN 2181-3187

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + Y = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Чегаравий шартлар учун эса :

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m - \bar{X} = 0,$$

$$\tau_{yx} m + \sigma_x l - \bar{Y} = 0 \tag{5}$$

муносабатлар бажарилиши керак.

Ўз навбатида текис масала учун Коши муносабатлари ва Сен-Венан тенгламаси

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \tag{7}$$

кўринишга келади. Қолган 5 та деформацияларни бирга бўлиш шартлари ўз-ўзидан бажарилади. Деформация ва кучланиш компоненталари орасидаги боғланиш учун (Гук қонуни)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \tag{8}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy},$$

муносабатлар ўринли.

Тенгламалар системасини кучланишларда ёзиш учун (8), Гук қонунидан фойдаланиб (7) деформацияларни биргаликда бўлиш шартига қўямиз. Оддий амаллардан сўнг

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0,$$

ва мувозанат тенгламаларидан фойдаланиб :

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + (1+\mu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) = 0,$$

кучланишларга нисбатан тенгламани ҳосил қиламиз ва соддалаштирилгандан сўнг

ISSN 2181-3187

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0, \text{ ёки}$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0, \qquad \nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{9}$$

гармоник тенгламага келамиз.

Бу ҳолда текис масала мувозанат тенгламалари (5), чегаравий шартлар (6) ва (9) гармоник тенгламаларни қаноатлантирувчи $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ кучланиш компоненталарини топишга келади. Бундай масалани φ кучланиш функциясини киритиш орқали ечиш учун қулай кўринишга келтирилади. Бунда $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ лар учун

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \tag{10}$$

ўринли.

Бу ҳолда мувозанат тенгламалари айниятга айланади ва деформацияларни биргаликда бўлиш шартидан

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0, \tag{11}$$

бигармоник тенглама келиб чиқади. Бунда

$$\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Агар ҳажмий кучлар U потенциалга эга бўлса у ҳолда хажмий кучлар учун

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=-\frac{\partial U}{\partial y}$$

ва кучланиш функциясини

$$\sigma_x-U=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

$$\sigma_y-U=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},$$

муносабатлар орқали киритсак, деформацияларни биргаликда бўлиш шартидан:

$$\nabla^2\nabla^2\varphi+(1-\mu)\nabla^2U=0, \tag{12}$$

тенгламага эга бўламиз.

Шундай қилиб, эластиклик назариясининг текис масаласи (11) ёки (12) тенгламани ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи кучланиш функциясини аниқлашга келтирилар экан.

ISSN 2181-3187

Қуйида эластиклик назариясининг текис масаласини қутб координаталар системасида кўриб чиқамиз. Чунки кейинги кўриладиган “контакт” масалалари асосан қутб координаталарда ўрганилади. Декарт координатаси билан қутб координаталари орасида

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \theta = arctg\frac{y}{x},$$

боғланишга кўра ва хусусий ҳосилалар орасидаги

$$2r = \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad 2r = \frac{\partial r}{\partial y} = 2y,$$

муносабатларга асосан :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{2})}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \qquad \frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Бу ҳолда, Навье тенгламалари қуйидаги

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta_r}{\partial r} + \dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}\dfrac{1}{r} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\dfrac{1}{r} + 2\dfrac{\tau_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

кўринишга келади.

Чизиқли ва бурчак ўзгаришига мос келувчи деформациялар эса:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{u}{r}, \\ \gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r}, \end{cases}$$

кўринишда аниқланади. Ўз навбатида Гук қонуни учун

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta), \qquad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{r\theta},$$

муносабатлар ўринли. Энди бигармоник тенгламани қутб координата системасида кўриб чиқамиз.

Қутб координаталар системасида кучланиш функцияси қуйидаги

$$\sigma_r = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \qquad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},$$

кўринишда киритилса, у ҳолда мувозанат тенгламалари айниятга айланади. Энди кутб координаталарда деформациянинг биргаликда бўлиш шартлари устида тўхталиб ўтамиз.

Агар $\varphi = \varphi(r,\theta)$ қутб координаталарининг функцияси сифатида қаралса у ҳолда

ISSN 2181-3187

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\sin\theta\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\sin\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}=$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cos^2\theta-\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial r}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\sin^2\theta,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\sin^2\theta+\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial r}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\cos^2\theta,$$

ва бунга кўра, Лаплас оператори учун

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2},$$

ўринли ва бигармоник тенглама эса

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)=0 \qquad (14)$$

кўринишга келади.

Шундай қилиб, эластиклик назариясининг текис масаласи қутб координаталар системасида (14) бигармоник тенгламани ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи кучланиш функциясини аниқлашга келар экан.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Джонсон К. “Механика контактного взаимодействия”. Москва. МИР. 1989.
2. Hardy C., Baronet C.N., Tordion G.V. Elastoplastic identation of a half-space by a rigid sphere.-J.Numerical Methods in Engng., 1971, 3, p.451.
3. Аргатов И.И., Назаров С.А. Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // Механика контактных взаимодействия. М. :Физматлит, 2001. С. 73-82
4. Алмардонов О.М. “Эгри чизиқли штамп масаласи”-Математика, механика ва информатика фанларининг ривожида истеъдодли ёшларнинг ўрни илмий амалий тезислари тўплами. Тошкент-2014. 6-бет