TO‘PLAMLAR USTIDA AMALLAR. IKKILIK MUNOSABATLARI

***G`affarova Dilfuza Shavkat qizi*** - *NavDPI o`qituvchisi*
Ashurova Gulshan Shuhratovna - *NavDPI o`qituvchisi*
***Sadullayeva Iroda Po`lat qizi*** - *NavDPI o`qituvchisi*

Tayanch iboralar: *To‘plam, qism to‘plam, teng to‘plamlar, to‘plamlar birlashmasi, to‘plamlar kesishmasi, to‘plamlar ayirmasi, to‘plamlarning simmetrik ayirmasi, to‘ldiruvchi to‘plam, ikkilik munosabatlari*.

Ixtiyoriy tabiatli A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarning *yig‘indisi* yoki *birlashmasi deyiladi.* $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarning *kesishmasi deyiladi.* Ixtiyoriy (chekli, cheksiz) sondagi A_α to‘plamlarning yig‘indisi va kesishmasi ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$\bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha = \{x : \exists \alpha_0 \in X,\ x \in A_{\alpha_0}\},\quad \bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in X,\ x \in A_\alpha\}.$$

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarning *ayirmasi deyiladi.* Agar $B \subset A$ bo‘lsa, $A \setminus B$ to‘plam B to‘plamning A to‘plamgacha *to‘ldiruvchi to‘plami deyiladi* va $C_A B := CB$ shaklda belgilanadi. Ba’zan, A va B to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* tushunchasini kiritish maqsadga muvofiq bo‘ladi. $A \setminus B$ va $B \setminus A$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat to‘plamga A va B to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi deyiladi*, ya’ni $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Agar $A, B \subset G$ bo‘lib, G da $+$ amali aniqlangan bo‘lsa, u holda $A + B = \{c : c = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$ to‘plam A va B to‘plamlarning *arifmetik yig‘indisi deyiladi.*

X va Y to‘plamlarning *dekart ko‘paytmasi* deganda

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

to‘plam tushuniladi. $X \times Y$ to‘plamning ixtiyoriy R qism toplami *munosabat deyiladi.* x element (x, y) juftlikning birinchi koordinatasi, y element esa (x, y) juftlikning ikkinchi *koordinatasi deyiladi* va mos ravishda $x = pr_1(x, y)$ va $y = pr_2(x, y)$ kabi belgilanadi. Xuddi shunday $X \times Y$ to‘plamning ixtiyoriy R

qism to'plamining birinchi va ikkinchi koordinatalarga proyeksiyalari aniqlanadi:

$$pr_1R = \{x : x \in X,\ \exists y \in Y, (x,y) \in R\},$$

$$pr_2R = \{y : y \in Y,\ \exists x \in X, (x,y) \in R\}.$$

Bu to'plamlar R munosabatning mos ravishda *aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi deyiladi.* Bundan keyin biz $\mathcal{P}(X)$ bilan X ning barcha qism to'plamlari sistemasini belgilaymiz.

Endi mavzuga oid misollar keltiramiz.

To'plamlar nazariyasida muhim o'rin tutadigan va *ikkilik prinsipi* deb nomlanuvchi quyidagi ikki munosabatni isbotlang.

1.1. Kesishmaning to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar yig'indisiga teng:

$$E \setminus \bigcap_a A_a = \bigcup_a (E \setminus A_a), \quad A_a \subset E. \tag{1.1}$$

1.2. Yig'indining to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar kesishmasiga teng:

$$E \setminus \bigcup_a A_a = \bigcap_a (E \setminus A_a), \quad A_a \subset E. \tag{1.2}$$

Isbot. Biz (1.2) tenglikning isbotini keltiramiz. Ixtiyoriy $x \in E \setminus \bigcup_a A_a$ elementni olamiz, bu yerdan $x \in E$ va $x \notin \bigcup_a A_a$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan ixtiyoriy a uchun x ning A_a to'plamga tegishli emasligiga kelamiz. Demak, x element A_a to'plamlarning to'ldiruvchilarida yotadi. Shunday qilib, ixtiyoriy a uchun $x \in E \setminus A_a$ munosabat o'rinli, bundan biz $x \in \bigcap_a (E \setminus A_a)$ ga ega bo'lamiz. Bu esa

$$E \setminus \bigcup_a A_a \subset \bigcap_a (E \setminus A_a) \tag{1.3}$$

munosabatni keltirib chiqaradi. Endi teskari munosabatni isbotlaymiz. Agar $x \in \bigcap_a (E \setminus A_a)$ bo'lsa, u holda barcha a larda $x \in E \setminus A_a$ bo'ladi va x element A_a to'plamlarning birortasiga ham tegishli emas, bu esa $x \notin \bigcup_a A_a$ ekanligini bildiradi. Demak, $x \in E \setminus \bigcup_a A_a$ ekan. Bundan biz

$$E \setminus \bigcup_a A_a \supset \bigcap_a (E \setminus A_a) \tag{1.4}$$

munosabatga kelamiz. (1.3) va (1.4) munosabatlar (1.1) tenglikni isbotlaydi.

1.3. To'plamlar yig'indisi va kesishmasi kommutativ. Isbotlang.

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

1.4. To'plamlar yig'indisi va kesishmasi assotsiativ. Isbotlang.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

1.5. $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Berilgan to'plamlarning tengligini tekshirish $A \subset B$ va $B \subset A$

munosabatlarni ko‘rsatish orqali amalga oshiriladi. Endi $x \in (X \setminus Y)\setminus Z$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $x \in X \setminus Y$, $x \notin Z \Rightarrow x \in X$, $x \notin Y$, $x \notin Z \Rightarrow x \in X$, $x \notin (Y \cup Z) \Rightarrow x \in X \setminus (Y \cup Z)$. Demak, $(X \setminus Y)\setminus Z \subset X \setminus (Y \cup Z)$ munosabat o‘rinli. Endi teskari munosabatni ko‘rsatamiz. $y \in X \setminus (Y \cup Z)$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $y \in X$, $y \notin Y \cup Z$ bo‘ladi. Bu yerdan $y \in X, y \notin Y, y \notin Z$ ekanligini, bundan esa $y \in X \setminus Y$, $y \notin Z$ natijada $y \in (X \setminus Y)\setminus Z$ ekanligini olamiz. Demak, $(X \setminus Y)\setminus Z \supset X \setminus (Y \cup Z)$ munosabat ham o‘rinli. Olingan bu ikki munosabatdan $(X \setminus Y)\setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$ tenglik kelib chiqadi. □

Quyidagi munosabatlarni (1.6-1.7) isbotlang.

1.6. $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$.

1.7. $X \subset Z \wedge Y \subset Z \Leftrightarrow X \cup Y \subset Z$.

1.8. $(X \cap X_1)\times(Y \cap Y_1) = (X \times Y)\cap(X_1 \times Y_1)$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Bu yerda ham 1.5-misoldagi kabi yo‘l tutamiz. $\forall (x,y) \in (X \cap X_1)\times(Y \cap Y_1) \Rightarrow x \in X \cap X_1,\ y \in Y \cap Y_1$. Bu yerdan $x \in X,\ y \in Y \wedge x \in X_1,\ y \in Y_1 \Rightarrow (x,y) \in X \times Y \wedge (x,y) \in X_1 \times Y_1$ ekanligini, bundan esa $(x,y) \in (X \times Y)\cap(X_1 \times Y_1)$ ni olamiz. Ya’ni $(X \cap X_1)\times(Y \cap Y_1) \subset (X \times Y)\cap(X_1 \times Y_1)$ munosabat o‘rinli. Teskari munosabatni olish uchun $(x,y) \in (X \times Y)\cap(X_1 \times Y_1)$ dan orqaga qarab harakatlanish yetarli. Shunday qilib $(X \cap X_1)\times(Y \cap Y_1) = (X \times Y)\cap(X_1 \times Y_1)$ tenglik isbotlandi. □

Quyidagi (1.9-1.10) munosabatlarni isbotlang.

1.9. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y)\cup(X \times Z)$.

1.10. $(X \times Y)\cup(X_1 \times Y_1) \subset (X \cup X_1)\times(Y \cup Y_1)$.

1.11. Ixtiyoriy $\{A_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligi uchun shunday $\{B_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligini tuzingki,

a) $B_n \subset A_n,\ \ B_i \cap B_j = \emptyset,\ \ i \neq j,\ \ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsin;

b) $B_n \supset A_n,\ \ B_{n+1} \supset B_n,\ \ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsin;

c) $B_n \subset A_n,\ \ B_{n+1} \subset B_n,\ \ \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsin.

Yechish. Berilgan $\{A_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{B_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligini quyidagicha tuzamiz.

$$B_1 = A_1,\quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots,\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \ldots$$

Hosil qilingan $\{B_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligi misolning a) bandidagi barcha shartlarni qanoatlantiradi. Quyida biz b) va c) banddagi shartlarni qanoatlatiruvchi $\{B_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligini keltiramiz:

b) $B_1 = A_1,\quad B_2 = A_1 \cup A_2, \ldots,\ B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, \ldots$

c) $B_1 = A_1,\quad B_2 = A_1 \cap A_2, \ldots,\ B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k, \ldots\ .\ \Box$

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati:

1. G.Xudayberganov, A.Vorisov,X.Mansurov,B.Shoimqulov Matematik analizdan ma’ruzalar.1T.:«Voris-nashriyot».2010y. 374b.
2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. II T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 352 b.
3. Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А., Тургунбаев Р.М. Функциялар назарияси. Т.: «ЎАЖБНТ» Маркази, 2004у.- 148б.
4. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Funksional analiz. T.: TDPU. 2008 y.-136b.
5. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Matematik analiz funksional analizga kirish). T.: TDPU. 2014 y.-126b.
6. Ayupov Sh.A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar.Nukus.“Bilim”-2009 y. -302 b.
7. Turgunbayev R. Matematik analiz. 2-qism. T.:TDPU, 2008 y.-136b.
8. Жўраев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. 2-қ. Т.: «Ўзбекистон». 1999.- 303б.
9. Turgunbaev R.,Ismailov Sh.Abdullaev O. Differentsial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami.T.:TDPU.2007y.-84 b.
10. Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.III қисм.Т.,«Ўзбекистон».2000й.-400б.
11. Архипов Г.И.,Садовничий В.А.,Чубариков Д.И.Лекции по математическому анализу.М.:«Высшая школа».1999 г.–695 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегралное исчесление. 1 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г. – 416 стр.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегралное исчесление. 2 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г.-426 стр.